

数学序論講義ノート (最終更新: 2024 年 4 月 10 日)

作成: 久野雄介 (kunotti@tsuda.ac.jp)

事前学修・必要な予備知識など

「数学序論」では, 高校までの数学の知識だけを仮定します. 講義の最初の方は数学 I の「集合と命題」と重なる部分もありますので, 復習をしておいてください. とはいえ, 講義では全ての説明を始めから行います. 具体例として整数, 複素数, 関数, などを使いますので, 必要に応じて高校までの数学を復習してください. 項目を挙げると次のようになります:

- 実数, 有理数;
- 倍数/約数, 整数の合同式;
- 複素数の偏角, 絶対値, 複素数平面;
- 三角関数, 指数関数, 対数関数

この講義ノートについて

1 回分の講義ノートは 90 分の講義の内容に相当します. 講義中に時間が足りないときは説明を飛ばし, 後でこのノートを参照してもらうことになります. この講義ノートを予習や復習に活用して下さい. なお, ノートは随時更新します.

講義ノートには, 次の様な項目が登場します. それぞれの意味は以下のとおりです.

定義 大切な概念, 用語, 記号の意味を定めるものです. 一種の約束ごとです. 普通の文章の中にも用語や記号の意味の説明が出てきますので, 注意しながら読んでください.

定理 数学の世界で成り立つ「数学的事実」を述べたものです. 皆さんは, すでに三角関数の加法定理や連続関数の中間値の定理などを知っているはずですね.

証明 定理がどうして成り立つのかを説明した文章です. 定理の証明を読む前に, 定理が何を言っているのか, 仮定は何か, 結論は何か, をきちんとふまえましょう. □ という記号が出てきたら証明の終わりです.

例 直前の定義で導入した概念をみたく例や, 記号の使い方の例, 直前で証明した定理をみたく具体例などを説明します. 例は非常に大切です.

注 直前に述べたことの補足, 注意事項, 余談などがかいてあります.

数学の文章を小説を読むようなスピードで読むのは不可能です。何度も読み返したり前の部分を参照したり、寄り道をしながら読むことになります。一字一句、ゆっくりゆっくり読んでください。誤植や間違いとおぼしき箇所や読んでいてよく分からない箇所を見つけたら、久野までお知らせ下さい。

ギリシャ文字とその読み方

数学の文章には記号が色々出てきますが、英語のアルファベット A, B, C, \dots や a, b, c, \dots の他に、ギリシャ文字もよく使われます。読み方とともに紹介しておきます。(この講義ノートでは一部の文字しか使いません。)

文字	読み方	文字	読み方
α	アルファ	ν	ニュー
β	ベータ	ξ, Ξ	グザイ, クサイ
γ, Γ	ガンマ	\omicron	オミクロン
δ, Δ	デルタ	π, Π	パイ
ϵ, ε	イプシロン	ρ	ロー
ζ	ゼータ	σ, Σ	シグマ
η	エータ	τ	タウ
θ, Θ	シータ, テータ	υ, Υ	ウプシロン
ι	イオタ	ϕ, φ, Φ	ファイ
κ	カッパ	χ	カイ
λ	ラムダ	ψ, Ψ	プサイ
μ	ミュー	ω, Ω	オメガ

ここで、 γ, Γ の様になっているところは小文字と大文字を並べてかいています。ただし、 ϵ, ε はどちらも小文字の「イプシロン」です。 ϕ, φ はどちらも小文字の「ファイ」です。

以下の本文では、「ですます調」を止めてかきます。

第一回講義ノート

今回学ぶこと

- 数学において、命題とは何か.
- 変数を持つ命題 (= 条件).
- 命題の否定, P かつ Q , P または Q , P ならば Q .

§ 命題論理の基本.

数学は諸科学の基礎であり、最も厳密な学問であると言える。数学で用いる言葉は誰にとっても同じ解釈ができるものでなければならず、日常使われる言葉とは決定的に異なる。

真偽 (正しいか間違っているか) が曖昧さなく定まった文章を**命題**という。数学で扱う文章はほとんど全てが命題である。ここでは、命題の取り扱い方の基礎事項を説明する。

注 . 真である命題のことを**定理**という。要するに、定理とは数学の世界における真理である。それに対し、**定義**とは、用語や記号の使い方を定める約束ごとである。

定理が真であることを説明した文章をその定理の**証明**という。定理の証明には、基本的な推論規則と、すでに真だと分かっている他の定理を用いる。こうすると、定理 A は正しい、なぜなら定理 B が正しいからである、また、定理 B が正しいのはそれが定理 C から導かれるからである、と真理の根拠を求めて堂々巡りが始まり、いつまで経っても終わらない気がする。実際には、誰もが正しいだろうと了解できる様な命題、すなわち**公理**を議論の出発点として採用する。この様なやり方を公理主義という。

普段数学をする上で公理を意識することはあまりないと思うが、最も標準的と思われるのは ZFC の公理系 (ツェルメロ-フレンケルの公理系に選択公理を加えたもの) である。

例 1 (命題の例). (1) 「2 は 1 より大きい」 この命題は真.

(2) 「任意の実数 x について、 $x^2 > 0$ ならば $x > 0$ である」 この命題は偽.

(3) 「 a を 1000 番目の素数とする」 NG. これは記号 a の定義であり、命題ではない.

(4) 「1000 は大きい数だ」 NG. この文章は命題ではない。「大きい」の意味が曖昧.

命題は P, Q の様に名前を付けてあらわすと便利である。例えば、

P : 「任意の実数 x について、 $x^2 > 0$ ならば $x > 0$ である」

とかけば長い文章を毎度書かずにすむ。

命題 P が真であることを、「 P が成り立つ」や「 P が成立する」のようにも言う。

例 2 (変数を持つ命題の例). (1) 「実数 x は $x^2 - x > 0$ をみたす」

(2) 「整数 x は 7 で割り切れる」

(3) 「 $x^2 + 2x + 1$ 」 NG.

文章 (1)(2) は、文字 x に具体的な値が入って初めて、文章の真偽を決めることができる。例えば、(2) の文章「整数 x は 7 で割り切れる」そのものは x が具体的に何であるかが分からない限り、正しいか間違っているかなど決めようがない。そして、例えば $x = 2$ とすると文章は「整数 2 は 7 で割り切れる」となり、偽になる。また、 $x = 14$ とすると文章は「整数 14 は 7 で割り切れる」となり、真になる。 x の値によって、真偽が変化する。このようなものを **変数を持つ命題** といい、 x をその変数という。 x についての **条件**、ともいう。この講義ノートでは、どちらの言い方も使う。文章 (3) は条件ではない。ただの式である。

注 . (1) 変数はいつも x とは限らない。例えば、例 2 (2) で「整数 a は 7 で割り切れる」と書くと、これは a についての条件になる。

(2) 変数には動く範囲がある。例 2 (1) では x は実数全体を動き、(2) では整数全体を動く。

変数を持つ命題は、 $P(x)$ の様に変数を明示して表す。例えば、

$$P(x): \text{「実数 } x \text{ は } x^2 - x > 0 \text{ をみたす」}$$

とかく、ある具体的な値 a について $P(a)$ が真となるとき、「 a は条件 P をみたす」や「 $P(a)$ が成立する」のようにもいう。例えば、 $P(x)$ を上のものとするとき実数 2 は条件 P をみたす。なぜなら、 $2^2 - 2 = 2$ であり、 $2^2 - 2 > 0$ が成り立つからである。また、 $P(0)$ は成立しない。なぜなら、 $0^2 - 0 = 0$ であり、 $0^2 - 0 > 0$ が成立しないからである。

命題が変数を持つ場合、変数は一つとは限らない。

例 3. a, b は実数とし、次の文章を考える。

$$P(a, b): \text{「} x \text{ に関する 2 次方程式 } x^2 + ax + b = 0 \text{ は実数解を持つ」}$$

例えば、 $P(0, -1)$ は真である。なぜなら、

$$P(0, -1): \text{「} x \text{ に関する 2 次方程式 } x^2 - 1 = 0 \text{ は実数解をもつ」}$$

となり、 $x^2 - 1 = 0$ は $x = 1$ という実数解をもつからである。($x = -1$ でもよい。) 一方、 $P(0, 1)$ は偽である。なぜなら、

$$P(0, 1): \text{「} x \text{ に関する 2 次方程式 } x^2 + 1 = 0 \text{ は実数解をもつ」}$$

となるが、 $x^2 + 1 = 0$ は実数解をもたないからである。

以上のように、 $P(a, b)$ の真偽は a と b に具体的な値を入れると確定する。このような文章を、 a, b を変数とする命題 (または、 a, b についての条件) という。この例では、変数 a, b の動く範囲はともに実数全体である。

例 4 (ダミー変数). 次の命題は変数を持たず、普通の命題である。(真か偽か?)

「任意の実数 x に対して $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ が成り立つ」

注 . 変数を持つ命題を理解することはとても大切なので、あとでもっと詳しく説明する。

既知の様々な命題の組み合わせによって新たな命題を作ることができる。以下、 P を命題とする、という言い方をするとき、命題 P の中身には着目せず、その真偽だけを気にして取り扱っていく。

定義 5. 命題 P に対し、「 P ではない」という命題が作られる。これを P の 否定 といい、 $\neg P$ とかく。 P の真偽に応じて、 $\neg P$ の真偽は次の様に定義される：

P	$\neg P$
T	F
F	T

ただし、表の中で、 T は真 (true), F は偽 (false) をあらわす。

上の様な表を 真理値表 という。この表は、 P が真であるとき $\neg P$ は偽であり、 P が偽であるとき $\neg P$ は真である、ということを言っている。強調しておきたいのは、この表は「ではない」という言葉や \neg という記号の数学での使い方に関する定義であって、何かから導けるものではないということである。日常の言語 (日本語) の使用感覚と合う様に定義されている、という以上の説明はできない。

例 6. 「 $2 > 0$ 」の否定は「 $2 > 0$ ではない」、つまり「 $2 \leq 0$ 」である。

注 . 今後、「小なりイコール」の記号として、「 \leq 」ではなくて「 \leq 」を用いる。

定義 7. P と Q を命題とする。このとき、

- 「 P かつ Q 」という命題が作られる. これを $P \wedge Q$ とかく.
- 「 P または Q 」という命題が作られる. これを $P \vee Q$ とかく.
- 「 P ならば Q 」という命題が作られる. これを $P \Rightarrow Q$ とかく.

$P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q$ の真偽は次の真理値表により定義される：

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

再び強調したいのは、上の真理値表は「かつ」、「または」、「ならば」といった言葉、或いは $\wedge, \vee, \Rightarrow$ といった記号の数学での使い方に関する定義である、ということである。まず注意すべきところは「 P または Q 」の真偽である。 P と Q の少なくとも一方が真のとき、「 $P \vee Q$ 」は真となる。特に、 P と Q の両方が真である場合も、「 $P \vee Q$ 」は真となる。また、「 P ならば Q 」の真偽も要注意である。

注 . P が偽のとき、「 $P \Rightarrow Q$ 」は Q の真偽によらず真である。この約束は奇妙な感じがするかもしれないが、まずは上の真理値表を「 $P \Rightarrow Q$ 」の真偽の決め方の約束として受け取り、使うことで慣れていくのが良いと思う。定理12の後の注と、今回のノートの最後の注に追加の説明をしたので、それも読んで欲しい。

特に、この約束から次のことが言える：「 $P \Rightarrow Q$ 」という命題が真であることを証明するには、 P が真であると仮定して Q が真であることを示せば良い。なぜなら、 P が偽であれば「 $P \Rightarrow Q$ 」は上に述べたことから自動的に真となるし、 P が真であれば「 $P \Rightarrow Q$ 」が真になるのは Q が真になるときしかないからである。

注 . 多くの定理は「 P ならば Q 」の形をしている。 P の部分を**仮定**といい、 Q の部分を**結論**という。定理を理解するには、仮定と結論はそれぞれ何であるかを確認することが大切である。仮定は明示されていないこともあるので、前後の文脈もきちんとふまえよう。

注 . 命題の否定や「かつ」、「または」、「ならば」などは、変数を持つ命題に対しても全く同様に定義される。例えば、実数 x に対する条件として

$$P(x): x^2 > 0 \qquad Q(x): x > 0$$

の二つを考える. このとき,

$$P(x) \Rightarrow Q(x): x^2 > 0 \text{ ならば } x > 0$$

となる. $P(x) \Rightarrow Q(x)$ も実数 x に対する条件である.

例 8. 三平方の定理とは次の様な主張である. 仮定と結論はそれぞれ何か?

「 a, b, c が直角三角形の三辺の長さで, c が斜辺の長さであるとする $a^2 + b^2 = c^2$ 」

定義 9. 命題 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ を $P \Leftrightarrow Q$ とかく. $P \Leftrightarrow Q$ が真であるとき, 命題 P と Q は同値であるという.

真理値表より, $P \Leftrightarrow Q$ が真となるのは, P と Q の真偽が一致するときであると分かる.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を繰り返し使うこともできる. 例えば, 命題 P, Q, R から

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R$$

が作られる. こうして, 命題を表す記号 P, Q, R, \dots と $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を組み合わせて作った“式”を論理式という.

一見して異なる論理式が全く同じ意味を持つことがある. 重要な例をいくつか見よう.

定理 10 (「 P ならば Q 」の言い換え). $P \Rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ は同値な論理式である.

証明の前に, まず定理の言っていることを確認しよう. これは, P と Q がどんな命題であっても, 命題「 $P \Rightarrow Q$ 」と命題「 $(\neg P) \vee Q$ 」の真偽が一致するということである. 証明は, P と Q の中身ではなく, その真偽のみに着目して行われる.

証明. $(\neg P) \vee Q$ の真理値表は次の様に求められる:

P	Q	$\neg P$	Q	$(\neg P) \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

これは $P \Rightarrow Q$ の真理値表と同じなので、 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$ が真となる。 \square

注 . 定理 10 の内容を言い換えると、論理式

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$$

は P, Q の真偽に依らず、真になると言っている。この様な論理式を トートロジー という。

注 . 変数 x の動く範囲が同じである様な条件 $P(x), Q(x)$ があるとする。 x の全ての取りうる値に対して $P(x)$ と $Q(x)$ が同値になるとき、 $P(x)$ と $Q(x)$ は条件として同値であるという。例えば、例 3 で扱った実数 a, b に関する条件

$$P(a, b): \text{「} x \text{ に関する 2 次方程式 } x^2 + ax + b = 0 \text{ は実数解を持つ」}$$

は、全く見かけの異なる条件

$$Q(a, b): \text{「} a^2 - 4b \geq 0 \text{」}$$

と同値である。 どうしてだろうか。 2 次関数の判別式を思い出そう！

注 . 式や条件の変形に \Leftrightarrow を多用する人がいるが、同値でない所に使うのは間違いである。

引き続き、同値な論理式の例を挙げよう。 証明は演習問題にまわす。

定理 11 (対偶の原理). $\neg Q \Rightarrow \neg P$ と $P \Rightarrow Q$ は同値な論理式である。

ここで、 $P \Rightarrow Q$ の 対偶 とは、 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ という命題のことである。(高校で習ったはず。)

定理 12 (排中律). どんな命題 P に対しても、 $P \vee (\neg P)$ は真、 $P \wedge (\neg P)$ は偽である。

排中律は、命題 P に対し、 P か $\neg P$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ、ということを述べている。平たく言えば、命題の様な文章は、本当かうそのどちらかである、ということである。特に、うそでなければ本当だ、という理屈になる。

注 . 少し寄り道。 P が偽のとき、「 $P \Rightarrow Q$ 」の真偽は Q の真偽によらず真とする、と定義した。いま登場した排中律を踏まえ、何故この様に定義するのか、気持ちの「説明」を試みよう。まず、「 P ならば Q 」の日常用語での意味を次の様に解釈する：

$$\text{「} P \text{ が真であるときは必ず } Q \text{ も真である」} \quad (\spadesuit)$$

(\spadesuit) は、 P が偽のときのことについては何も言っていないので、

$$P \text{ が偽のとき、} (\spadesuit) \text{ はうそは言っていない。}$$

排中律を仮定すれば, うそ (偽) でないのなら本当 (真) であるはずだから

P が偽のとき, 「 P ならば Q 」は真である

と考えられる. 例えば,

P : 「明日晴れる」, Q : 「山に行く」

にする. 次の日になり, 雨だった (P が偽) とする. 山に行ったら「雨なのにお疲れ様です」, 山に行かないなら「雨で残念, 晴れば良かったですね」と声をかけたくなる様な場面である. それはさておき, どちらの場合も発言者はうそはついてない!

定理 13. P と $\neg(\neg P)$ は同値な論理式である.

定理 14 (ド・モルガンの法則). P, Q を命題とする.

- $\neg(P \wedge Q)$ は $(\neg P) \vee (\neg Q)$ と同値である.
- $\neg(P \vee Q)$ は $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ と同値である.

注. 四則演算では $(3 + 2) \times 4$ の様にかっこを使って計算の順番を明らかにする. 同様に, 命題の計算にも適切にかっこを使うのがよい. 例えば $\neg P \vee Q$ とかくと, $(\neg P) \vee Q$ なのか $\neg(P \vee Q)$ なのかははっきりしないので, やめよう.

注. 定理 10 は次の様に考えたら理解しやすいかもしれない. 「 P ならば Q 」というのは,

「 P が成り立っているときは, Q がいつも成り立つ」, つまり

「 P が成り立っているのに Q が成り立っていない, ということはない」, つまり

「 $\neg(P \wedge (\neg Q))$ 」

これはド・モルガンの法則と定理 13 により, 「 $(\neg P) \vee Q$ 」と同値になる. より詳しくは:

$$\left[\neg(P \wedge (\neg Q)) \right] \underset{\text{ド・モルガン}}{\iff} \left[(\neg P) \vee (\neg(\neg Q)) \right] \underset{\text{定理 13}}{\iff} \left[(\neg P) \vee Q \right]$$

第一回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) 命題の例を挙げよ. 命題ではない文章の例を挙げよ. (講義ノートの例以外で)
- (2) 変数を持つ命題 (条件) の例を挙げよ. (講義ノートの例以外で)
- (3) 次の文章の種類を答えよ. (命題か?条件か?変数は何か?)

「 x に関する 2 次方程式 $x^2 + cx + 4 = 0$ は実数解を持つ」

- (4) 命題 P が偽で命題 Q が真とする. このとき, $P \Rightarrow Q$ の真偽はどちらか?
- (5) 「 $\neg P \vee Q$ 」とかくと二通りの解釈の可能性があり, 紛らわしい. 適切に括弧を使って, 二つの解釈の違いをはっきりさせよ. さらに, それぞれの解釈として得られる命題の真理値表をかけ.

問題 1. (1) 「 $-1 \geq 1$ ならば $1 \geq 1$ である。」この命題の真偽を判定せよ.

- (2) 実数 a, b, c に対する条件

$$a = b = c$$

の否定をわかりやすくかけ. (ヒント: $a = b = c$ は 「 $a = b$ かつ $b = c$ 」 の略記法.)

- (3) 実数 x に対する条件

$$-2 \leq x \leq 3$$

の否定をわかりやすくかけ.

- (4) 実数 x に対する条件

$$|x| \leq 3$$

を絶対値 $||$ の記号を使わないかたちでかきなおせ.

- (5) 二つの実数 a, b が相異なるという条件は, 「 $a \neq b$ 」 とかける. 三つの実数 a, b, c が相異なるという条件を同様の方法であらわせ. 四つの実数 a, b, c, d が相異なるという条件についてはどうか? (問題 7 の後の注も参照せよ.)

問題 2. $\sqrt{2}$ は無理数である. このことをふまえ, 次の命題の真偽を判定せよ.

- (1) $\sqrt{2}$ が無理数ならば $1 = 0$ である.
- (2) $\sqrt{2}$ が無理数ならば $1 \neq 0$ である.
- (3) $\sqrt{2}$ が有理数ならば $1 = 0$ である.
- (4) $\sqrt{2}$ が有理数ならば $1 \neq 0$ である.

問題 3. 実数 x についての次の条件を考える.

$$R(x) : \text{「}x^2 > 0 \text{ ならば } x > 0\text{」}$$

- (1) $R(1)$ の真偽を判定せよ.
- (2) $R(-1)$ の真偽を判定せよ.
- (3) $R(0)$ の真偽を判定せよ.

問題 4. 実数 x, y に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(これを, 三角不等式という.) 証明の中で, 実数のどのような性質を使っているだろうか?

問題 5. 真理値表をかくことにより, 以下を証明せよ.

- (1) 対偶の原理: 「 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 」と「 $P \Rightarrow Q$ 」は同値な論理式である.
- (2) 排中律: どんな命題 P に対しても, $P \vee (\neg P)$ は真, $P \wedge (\neg P)$ は偽である.
- (3) P と $\neg(\neg P)$ は同値な論理式である.
- (4) ド・モルガンの法則 (その 1): $\neg(P \wedge Q)$ は $(\neg P) \vee (\neg Q)$ と同値である.
- (5) ド・モルガンの法則 (その 2): $\neg(P \vee Q)$ は $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ と同値である.

問題 6. 真理値表をかくことにより, 以下を証明せよ.

- (1) 「 $P \vee Q$ 」と「 $Q \vee P$ 」は同値な論理式である.
- (2) 「 $P \wedge Q$ 」と「 $Q \wedge P$ 」は同値な論理式である.
- (3) 「 $P \Rightarrow (P \vee Q)$ 」はトートロジーである.
- (4) 「 $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ 」はトートロジーである.

問題 7. P, Q, R を命題とする. 真理値表をかくことにより, 以下を証明せよ.

- (1) 「 $(P \vee Q) \vee R$ 」と「 $P \vee (Q \vee R)$ 」は同値である.
- (2) 「 $(P \wedge Q) \wedge R$ 」と「 $P \wedge (Q \wedge R)$ 」は同値である.
- (3) 「 $(P \vee Q) \wedge R$ 」と「 $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ 」は同値である.
- (4) 「 $(P \wedge Q) \vee R$ 」と「 $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ 」は同値である.

注. (1) の結果から, 「または」だけがあるときは, かつこの付け方が違っても同値な命題が得られることが分かる. 混乱の恐れがないので, こういう場合は「 $P \vee Q \vee R$ 」と簡潔にかく. (2) でも同様で, 「かつ」だけがあるときは, かつこの付け方は気にしなくて良くなる. 「 $P \wedge Q \wedge R$ 」の様にかいたりする. 4 つ以上の命題があるときも同様である.

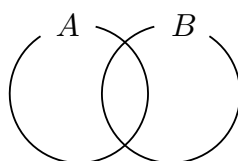
問題 8. 「 P ならば Q 」の否定は、「 P かつ $\neg Q$ 」と同値であることを示せ.

第二回講義ノート

今回学ぶこと

- 集合とは何か. 外延的記法と内包的記法.
- 集合の包含関係, $A \subset B$.
- 直積集合.

集合については高校でも少し習ったことと思う. ベン図



を扱ったことも思い出さるう.

大学で学ぶ数学では集合が全面に出てくる. 現代の数学は集合論の概念を使って組み立てられており, その役割は語学における文法の様なものである. この講義では, 集合についての必要最低限の“クイックスタートガイド”を目指して説明を行う.

集合論が生まれた背景の一つには, 無限を数学的にきちんと取り扱うため, ということがある. この講義の後半では, 無限の不思議さを少し説明する. (第七回あたり)

§ 素朴集合論.

ものの集まりを**集合**という. 集合の構成要素を**元**(げん), または**要素**という. a が集合 A の元であることを, $a \in A$ とかいて表す. a が A の元であるとき, a は A に**含まれる**ということもある. $a \in A$ の否定を $a \notin A$ とかく.

例 1 (よく使う集合). 数の体系については, 次の様な定まった記号を用いる.

- \mathbb{N} : 自然数全体の集合 (ただし自然数は 1 から始まるとする)
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{Q} : 有理数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合

例 2 (記号の使い方). (1) 整数 $1, 3, 5, 7$ を元に持つ集合を $\{1, 3, 5, 7\}$ とかく. 括弧の形に注意せよ. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ のとき, 1 は A の元だから $1 \in A$ であり, 2 はそうでないから $2 \notin A$ である.

(2) 例えば, x が実数であることを, $x \in \mathbb{R}$ とあらわすことができる. x が整数であることを, $x \in \mathbb{Z}$ とあらわすことができる.

自然数全体の集合 \mathbb{N} を例 2 (1) の様なやり方で表すと

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

となる. \mathbb{N} には無限個の元があるので, それらを全て書ききることはできない. そこで, 「 \dots 」の部分には以下続く, という感じで使っている. こうした書き方は, 見た目が分かりやすいのが良い. しかし, 「 \dots 」の部分に何が並ぶのかが明確でない限りは, 誤解を招くこともある. なるべく, 後で説明する内包的記法を使おう.

注. ものの集まりを集合と呼ぶことにしたが, 一つ約束がある: 集合を考えるときには, それは何を集めたのかについての基準が曖昧さなく決まっていなくてはならない. これは, 前回の講義で命題について説明したことと似ている. 第一回講義の例 1 で「1000 は大きい数だ」は命題ではないことを述べた. 同じ理由で, 「大きい整数全体の集合」というものも集合とは考えない.

一つだけでなく, 二つ以上の集合があるとき, それらの間の関係を考えることになる. 最も基本的なものは, 包含関係である.

定義 3 (部分集合, 集合の相等). A, B を集合とする.

(1) 任意の A の元が B の元でもあるとき, A は B の部分集合であるという. A が B の部分集合であるとき, $A \subset B$ や $B \supset A$ のようにかく. すなわち, $A \subset B$ であるとは, 任意の x に対して

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つことである. また, $A \subset B$ でないとき, $A \not\subset B$ とかく.

(2) $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき, A と B は集合として等しいといい,

$$A = B$$

とかく.

なお, $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき, A は B の真部分集合であるといい, $A \subsetneq B$ とかく.

例 4. ある数が自然数であれば, それは整数でもある. つまり, 任意の x に対して

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. そこで, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ である. 同様に, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ がそれぞれ成り立つ. (最後のもの: 実数 x を複素数 $x + 0i$ とみなしている.) 全部つなげてかくと,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

が成り立つ. (やや乱暴な記号の使い方だが, 不等式 $x < x^2 < x^3$ と同じ使い方である)

注. 二つの集合 A と B について $A \subset B$ を示すには, 何か適当な文字 x をとり, 条件 $x \in A$ を仮定して, $x \in B$ を示せばよい. さらに A と B が等しいことを示すには, $A \subset B$ と $B \subset A$ の両方が成り立つことを示せばよい. 要するに,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が任意の x について真であるとき, $A = B$ となる.

注. 二つの集合 A と B が $A = B$ をみたすということは, A と B が全く同じ元たちからなっていることを意味する. A と B の見た目は違うかもしれないが, その構成要素に着目すると二つの集合は区別ができないので, 等しいとみなされるということである.

注. 前の注意により, 集合を元を列挙してあらかず場合は, かつこの中に元を並べる順番は気にしなくてよい. 例えば,

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$$

である. また, かつこの中に同じ元を重複してかいても構わないが, それは重複せずにかいたものと同じであると考え. 例えば,

$$\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

である.

元を一つも含まない集合を**空集合**(くうしゅうごう)といい, \emptyset とかく. どんな集合 A に対しても, $\emptyset \subset A$ が成り立つ. これは約束と思っても良いし, 次のようにして導くこともできる. 空集合は元を一つも含まないのだから, $x \in \emptyset$ は任意の x に対して偽である. そこで, 「 $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ 」は真である. よって, $\emptyset \subset A$ となる.

集合の表し方・定義の仕方. ある集合を定めるには, その集合に含まれる元を指定すれば良い. 方法は二通りある.

- 外延的方法. その集合が持つ元を全て列挙する. 例えば,

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

- 内包的方法. 集合に含まれるべき元の条件をかく. 例えば,

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 4\}$$

この記法は次の様に読む.

「整数 n であって $1 \leq n \leq 4$ をみたす様なもの全体の集合」

変数 n は他の記号に変えてもよい. 例えば, 次の様にかいても同じである.

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 4\}$$

注. 内包的記法の取り扱い方をまとめる. 具体例を扱うたびに確認すると良いと思う.

- (1) 一般に, 内包的記法では, 「条件 $P(x)$ をみたすような x 全体の集合」を

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

と表す. ここで, X は変数 x が動く範囲の集合を表す. (省略されることも多い.)

- (2) 集合 A が $A = \{x \mid P(x)\}$ と内包的記法により表されているとする. このとき,

$$a \in A \Leftrightarrow P(a) \text{ が真}$$

となる.

- (3) 集合 A と B が $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$ と表されているとする. このとき, $A \subset B$ であるための必要十分条件は, 任意の x に対して「 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 」が真となることである.
- (4) 特に, 次が成り立つ. $P(x)$, $Q(x)$ を x についての条件とする. $P(x)$ と $Q(x)$ が条件として同値であるとする. このとき, 集合としての等式 $\{x \mid P(x)\} = \{x \mid Q(x)\}$ が成り立つ.

内包的記法によって集合を定義する方法の例を挙げる.

例 5. a, b を実数とするとき,

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

をそれぞれ a, b を端点とする閉区間, 开区間という. つまり, $[a, b]$ は a 以上 b 以下である実数全体のなす集合であり, (a, b) は a より大きく b より小さい実数全体のなす集合である.

$a \in [a, b]$ である. なぜなら, $a \leq a \leq b$ が成り立つからである.

$a \notin (a, b)$ である. なぜなら, $a < a < b$ が成り立たないからである.



上図の様に閉区間 $[a, b]$ と开区間 (a, b) を図示することが多い. 端点の黒丸と白丸の違いは, その点が区間に含まれているかいないかをあらわしている.

また, 実数 a に対して,

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

とかく. これは, a 以上の実数全体のなす集合である. 同様に, 半开区間 $(a, b]$ や, $(-\infty, b]$, (a, ∞) などが定義される. そのやり方は明らかだろう.

注. 例 5 の $[a, b]$ の定義に現れた「:=」は, 左辺を右辺で定義する, という意味である.

例 6.

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0\}$$

とする. 右辺の x についての条件は, 方程式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0$ である. これの実数解は $x = 1, 2, 3, 4$ であるから, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ となる.

次の様な集合のあらわし方もよく使われる. (内包的記法の一つのヴァリエーション.)

例 7.

$$A := \{n^2 + 2n \mid n \text{ は } 3 \text{ 以下の自然数}\}$$

とおく. 右辺の式の読み方は

「 n が 3 以下の自然数を全て動くときに $n^2 + 2n$ が取り得る値を全て集めたもの」

である. 3 以下の自然数は $n = 1, 2, 3$ の三つある. $n^2 + 2n$ の値はそれぞれ 3, 8, 15 なので

$$A = \{3, 8, 15\}$$

となる. 他の例として, 奇数全体の集合を次の様にあらわせる:

$$\{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

もう少し扱える例を増やすために, 直積集合の概念を導入しよう.

定義 8. X, Y を集合とする. X の元 x と Y の元 y を順番に並べて括弧で閉じたもの (x, y) を, 順序対という. X の元と Y の元の順序対全体のなす集合を X と Y の **直積集合** といい, $X \times Y$ とかく. 式でかくと,

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y\}$$

注. 順序対とは, 最初に X の元, 次に Y の元という様に並べ方の順番が決まっていることを意味する. だから, 例えば $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は異なり, 区別して考える.

例 9. $X = \{a, b\}, Y = \{a, c\}$ のとき, $X \times Y$ を元を列挙する方法であらわすと

$$X \times Y = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$$

となる.

同様に, 3つの集合 X, Y, Z の直積集合 $X \times Y \times Z$ や, n 個の集合 X_1, \dots, X_n の直積集合 $X_1 \times \dots \times X_n$ も定義する. また, X の n 個の直積 $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n$ を X^n とかく. なお, X か Y のどちらかが空集合のときは直積集合も空集合になる. 例えば, $\emptyset \times Y = \emptyset$.

例 10. xy 平面の点全体を集合と考える. xy 平面の点はその x 座標と y 座標を指定すると定まるので, この集合は次の様にあらわせる:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

同様に, 3次元の座標空間は次の様にあらわせる:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

ここで, 「 $x, y \in \mathbb{R}$ 」は「 $x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ 」の略記である. より一般に, 1以上の自然数 n に対して n 次元の座標空間 (数空間) が定義できる:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

注. 例えば, \mathbb{R}^2 は平面の点全体の集合とみなせるから, その元は平面の点である. そこで, \mathbb{R}^2 から元をとるときには「 $P \in \mathbb{R}^2$ とする」の様に, とったものが点であることが分かるような記号をなるべく使うと良い. (点の英訳は point.) 実際は, 点 P は

$$P = (x, y)$$

の様な実数 x, y を用いてかかれている. 点 P について何か計算を行うとき, この様な P の座標表示が必要になるかもしれない.

集合を取り扱うときは、その集合の正体を見極めて、状況に応じて適切な記号を使っていくことが大切である。

例 11.

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

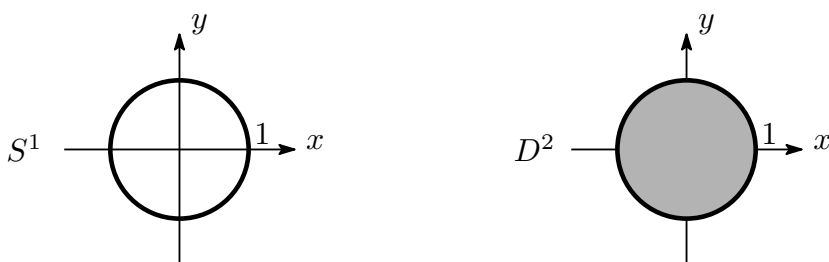
とおく。この式の読み方は

「 \mathbb{R}^2 の点 (x, y) であって $x^2 + y^2 = 1$ をみたす様なもの全体の集合」

である。よって、 S^1 は xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円である。高校までの言い方では、方程式 $x^2 + y^2 = 1$ の定める図形である。 S^1 を 単位円周 という。同様に、

$$D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

は xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円とその内部を合わせた図形である。不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の定める領域といってもよい。 D^2 を 単位円板 という。以下に S^1 と D^2 を図示した。 S^1 と D^2 はともに \mathbb{R}^2 の部分集合である。



例えば、 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \in S^1$ が成り立つ。なぜなら、 $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ が成り立つからである。また、 $(2, 0) \notin D^2$ が成り立つ。なぜなら、 $2^2 + 0^2 \leq 1$ は成り立たないからである。

また、 $S^1 \subset D^2$ が成り立つ。実際、 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ならば } x^2 + y^2 \leq 1$$

が成り立つからである。この条件を S^1 と D^2 の定義を見ながら言い換えると、

$$(x, y) \in S^1 \text{ ならば } (x, y) \in D^2$$

となり、 $S^1 \subset D^2$ が成り立つことが証明される。 $S^1 \subset D^2$ となることは図からも明らかであるが、集合 S^1 と D^2 の定義と部分集合の定義に従った証明ができることに着目しよう。

注. 集合についての包含関係 ($A \subset B$ の様な式) や等式 ($A = B$ など) を示すときは、あくまで論理に頼って行うこと。ベン図などの図もときには便利であるが、あくまで図なの

で証明にはならない. 少し複雑な定義式を持つ集合はそもそも図にあらわせないし, また, 扱う集合の個数が多くなるとベン図では処理できなくなる.

第二回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) $A \subset B$ であるが $A \neq B$ である様な集合 A, B の例を挙げよ.
- (2) 集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$ を, 元を全て列挙する方法であらわせ.
- (3) $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ のとき, 直積集合 $A \times B$ と $B \times A$ のそれぞれを, 外延的記法 (元を全て列挙する方法) であらわせ.
- (4) 単位円周 S^1 の定義を確認せよ. 原点 $O = (0, 0)$ について, $O \in S^1$ が成り立つか?
- (5) $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ とおく. 例 11 にならって, H を xy 平面上に図示せよ.

問題 1. 次の集合を外延的記法 (元を全て列挙する方法) であらわせ.

- (1) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 < 5\}$
- (2) $\{a \in \mathbb{Z} \mid |a - 3| < 4\}$
- (3) $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = 0\}$
- (4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$
- (5) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = -1\}$

問題 2. (1) $4 \cos^2 \theta$ が整数となる様な θ の値を全て求めよ. (ただし, 弧度法で考え, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.)

- (2) (1) の結果を踏まえ, 次の集合を外延的記法であらわせ.

$$\{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \text{ かつ } 4 \cos^2 \theta \in \mathbb{Z}\}$$

問題 3. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする.

- (1) $S = \{(a, b) \in A \times B \mid a^2 + b^2 = 25\}$ とおく. S を元を列挙する方法であらわせ.
- (2) $C = \{ab \mid (a, b) \in S\}$ とおく. C を元を列挙する方法であらわせ. (ab は実数 a と b の積である.)
- (3) $T = \{(a, b) \in A \times B \mid |a - b| \leq 1\}$ とおく. T を元を列挙する方法であらわせ.

問題 4. xy 平面において, 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の定める領域を A とする. また, 不等式 $xy \leq \frac{1}{2}$ の定める領域を B とする.

- (1) 領域 A と B を \mathbb{R}^2 の部分集合とみなし, それぞれを内包的記法であらわせ.
- (2) 領域 A と B をそれぞれ図示せよ. その結果から, A と B の包含関係について何が

成り立つか述べよ.

- (3) 実数 x, y に対して「 $x^2 + y^2 \leq 1$ ならば $xy \leq \frac{1}{2}$ 」が成り立つことを示せ. (ヒント: 相加相乗平均の不等式.) また, この不等式と (2) の結果を比べてみよ.

問題 5. a, b, c, d を実数とし, $a \leq b$ かつ $c \leq d$ をみたすとする. このとき, 閉区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ について, 次が成り立つことを示せ.

$$[a, b] \subset [c, d] \Leftrightarrow c \leq a \text{ かつ } b \leq d$$

(図は考える際の補助として用いてもよいが, 証明をかくときは数式と文章だけを用いよ.)

第三回講義ノート

今回学ぶこと

- 共通部分 $A \cap B$, 和集合 $A \cup B$, 補集合 A^c .
- 集合の集合, べき集合.
- 余談: ラッセルのパラドクス.

§ 素朴集合論のつづき.

既知の様々な集合から, 新しい集合を作る操作を説明する.

定義 1. X を集合, $A, B \subset X$ とする.

- **共通部分:** $A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$
- **和集合:** $A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$
- **差集合:** $A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$
- **A の補集合:** $A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$

これら $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A^c$ は X の部分集合になっている. ここで, A^c 以外のもは X なしでも定義できる. ただ, X は当面の考えの範囲を決め, その範囲にある全ての集合の入れ物の様な役割を果たしている. この様なものを **普遍集合** という.

$x \in A \cap B$ となるのは, $x \in A$ と $x \in B$ の両方が成立するとき, そのときに限る. また, $x \in A \cup B$ となるのは, $x \in A$ と $x \in B$ の少なくとも一方が成立するとき, そのときに限る. 気を付けるべきことは, $x \in A$ と $x \in B$ の両方が成立しているときも $x \in A \cup B$ となることである. なお, 任意の A と B に対して

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A, & A \cup B &= B \cup A, \\ A \cap B &\subset A, & A \cap B &\subset B, \\ A &\subset A \cup B, & B &\subset A \cup B \end{aligned}$$

が成り立つことにも注意しよう.

注. 「 $A, B \subset X$ とする」は, 「 A と B をともに X の部分集合とする」の略記である.

例 2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ のとき,

$$A \cap B = \{2\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad A^c = \{3, 4, 5\}$$

注. A と B がそれぞれ $A = \{x \in X \mid P(x)\}$, $B = \{x \in X \mid Q(x)\}$ の様に集合 X の元

を変数とする命題によりあらわされているとする。(第二回講義を復習せよ。) このとき、

$$A \cap B = \{x \in X \mid P(x) \text{ かつ } Q(x)\}$$

$$A \cup B = \{x \in X \mid P(x) \text{ または } Q(x)\}$$

となる。

共通部分や和集合, 補集合をとる操作には色々な公式がある。数例だけ示す。

例 3. 集合 A, B, C が $A \subset C$ かつ $B \subset C$ をみたすとする。このとき、次が成り立つ。

$$A \cup B \subset C$$

証明の方針: 「 $A \subset C$ かつ $B \subset C$ 」が仮定で $A \cup B \subset C$ が結論である。そして、 $A \cup B \subset C$ を示すには、「 $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$ 」を示せばよい。

例 3 の証明. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ を仮定する。

$x \in A \cup B$ とする。 $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ。

$x \in A$ のとき、 $A \subset C$ より $x \in C$ となる。

$x \in B$ のとき、 $B \subset C$ より $x \in C$ となる。

どちらの場合も $x \in C$ となる。以上より、「 $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$ 」が示された。よって $A \cup B \subset C$ 。 □

注 . 証明の中に現れた、 $A \subset C$ という条件の使われ方に着目しよう。 $A \subset C$ という条件と $x \in A$ という仮定から、 $x \in C$ という結論が得られている。

例 4.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

証明. まず、 $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ を示す。 $A \subset B$ を仮定する。

$x \in A \cap B$ とすると、 $x \in A$ かつ $x \in B$ 。特に、 $x \in A$ である。よって $A \cap B \subset A$ が成り立つ。 $x \in A$ とすると、 $A \subset B$ より $x \in B$ である。よって $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つから、 $x \in A \cap B$ 。従って、 $A \subset A \cap B$ 。以上より $A \cap B = A$ となる。

次に、 $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ を示す。 $A \cap B = A$ を仮定する。

$x \in A$ とすると、 $x \in A = A \cap B$ なので $x \in B$ である。以上より $A \subset B$ となる。 □

定理 5 (ド・モルガンの法則). X を集合、 $A, B \subset X$ とする。このとき、次が成り立つ。

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

証明. 最初の式のみ示す. 条件 $x \in (A \cup B)^c$ と $x \in A^c \cap B^c$ が同値であることを示せばよい.

次の, 条件としての同値性が成り立つ:

$$\lceil x \in (A \cup B)^c \rceil \Leftrightarrow \lceil \neg(x \in A \cup B) \rceil \Leftrightarrow \lceil \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \rceil$$

さらに, 第一回講義の定理 14 より,

$$\lceil \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \rceil \Leftrightarrow \lceil \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \rceil \Leftrightarrow \lceil (x \notin A) \wedge (x \notin B) \rceil$$

最後に,

$$\lceil (x \notin A) \wedge (x \notin B) \rceil \Leftrightarrow \lceil (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \rceil \Leftrightarrow \lceil x \in A^c \cap B^c \rceil$$

以上より, $\lceil x \in (A \cup B)^c \rceil \Leftrightarrow \lceil x \in A^c \cap B^c \rceil$ が示された. よって $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. \square

三つ以上の集合の共通部分や和集合も定義できる. 例えば, 集合 A, B, C に対して

$$A \cap B \cap C := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\}$$

を A と B と C の**共通部分**という.

$$A \cup B \cup C := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B \text{ または } x \in C\}$$

を A と B と C の**和集合**という.

より一般に, $n \geq 1$ を自然数とし, n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n が与えられているとする. このとき, A_1, A_2, \dots, A_n の**共通部分**とは,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i &:= \{x \mid \text{全ての } i(1 \leq i \leq n) \text{ に対して } x \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \text{ かつ } x \in A_2 \cdots \text{ かつ } x \in A_n\} \end{aligned}$$

のことである. $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ とかいてもよい.

また, A_1, A_2, \dots, A_n の**和集合**とは,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &:= \{x \mid \text{少なくとも一つの } i(1 \leq i \leq n) \text{ に対して } x \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \text{ または } x \in A_2 \cdots \text{ または } x \in A_n\} \end{aligned}$$

のことである. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ とかいてもよい.

二つの集合の共通部分・和集合のときと同様に次のことが言える. すなわち, $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ となるのは, $x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n$ なる n 個の条件が全て成立するとき, そのときに限る. また, $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ となるのは, $x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n$ のうち少なくとも一つが成立するとき, そのときに限る.

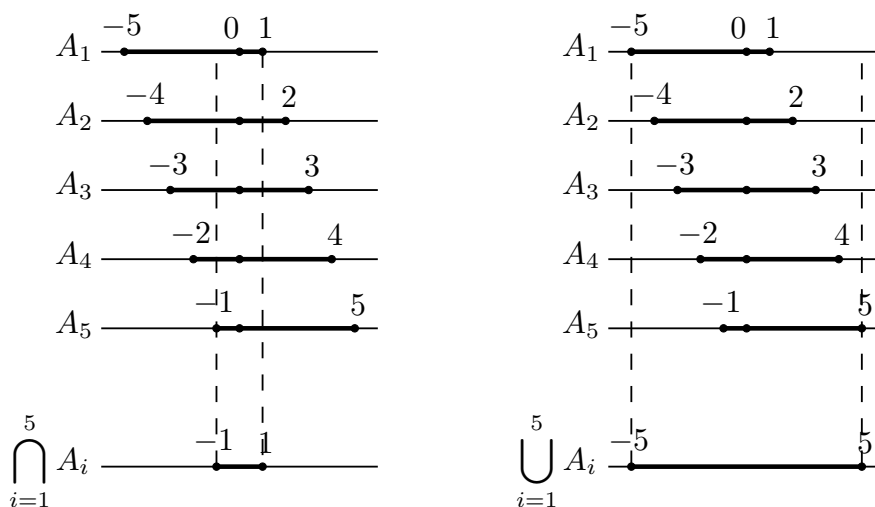
注. 上の $\bigcap_{i=1}^n A_i$ や $\bigcup_{i=1}^n A_i$ の定義式の中の「全ての $i(1 \leq i \leq n)$ に対して $x \in A_i$ 」や「少なくとも一つの $i(1 \leq i \leq n)$ に対して $x \in A_i$ 」という言い方については, 次回以降の講義でより詳しく説明する. そこで導入する論理記号「 \forall 」と「 \exists 」を使うと, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ や $\bigcup_{i=1}^n A_i$ の定義は (本質的には何も変わらないが) よりすっきりとかくことができる.

注. ここで, n 個の集合について A_1, A_2, \dots, A_n という記号を用いた. 文字 A の右下に付いた小さい番号 $1, 2, \dots, n$ を添え字という. なるべく一般的な議論を行うために, 「 n 個のもの」を考えることがある. その様なときに添え字を使うと便利である. 「3 個のもの」をあらわすなら記号は A, B, C や x, y, z ですむが, 「 n 個のもの」をあらわすにはどうしても添え字またはそれに類するものが必要になる. なお, $A(1), A(2), \dots, A(n)$ の様にかいても構わない.

例 6. $i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して閉区間 A_i を $A_i = [-5 + i - 1, i]$ と定める. このとき,

$$\bigcap_{i=1}^5 A_i = [-1, 1], \quad \bigcup_{i=1}^5 A_i = [-5, 5]$$

となる. 定義に基づいた証明を与える前に, 状況を図で示しておこう.



例えば、閉区間 $A_1 = [-5 + 1 - 1, 1] = [-5, 1]$ となる。共通部分 $\bigcap_{i=1}^5 A_i$ は、閉区間 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の全てに含まれる様な実数たちから成るので、答えは閉区間 $[-1, 1]$ となるのが見て分かる。和集合 $\bigcup_{i=1}^5 A_i$ は、閉区間 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の少なくとも一つに含まれる様な実数たちから成るので、答えは閉区間 $[-5, 5]$ となるのが見て分かる。

以下、 $\bigcap_{i=1}^5 A_i = [-1, 1]$ の証明のみ与えよう。 $\bigcup_{i=1}^5 A_i = [-5, 5]$ の証明は演習問題とする。

$\bigcap_{i=1}^5 A_i = [-1, 1]$ の証明: まず、 $\bigcap_{i=1}^5 A_i \subset [-1, 1]$ を示す。 $x \in \bigcap_{i=1}^5 A_i$ とする。 x は A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の全てに含まれる。特に、 $x \in A_1$ かつ $x \in A_5$ が成り立つ。 $x \in A_1 = [-5, 1]$ であるから、 $-5 \leq x \leq 1$ が成り立つ。特に、 $x \leq 1$ である。また、 $x \in A_5 = [-1, 5]$ であるから、 $-1 \leq x \leq 5$ が成り立つ。特に、 $-1 \leq x$ である。よって $x \leq 1$ かつ $-1 \leq x$ であるので、 $-1 \leq x \leq 1$ つまり $x \in [-1, 1]$ が成り立つ。以上より、 $\bigcap_{i=1}^5 A_i \subset [-1, 1]$ が示された。

次に、 $[-1, 1] \subset \bigcap_{i=1}^5 A_i$ を示す。 $x \in [-1, 1]$ とする。 $-1 \leq x \leq 1$ が成り立つ。 $x \in \bigcap_{i=1}^5 A_i$ であることを示せばよいが、そのためには $1 \leq i \leq 5$ なる各整数 i に対して $x \in A_i$ が成り立つことを示せばよい。いま、 $1 \leq i \leq 5$ なる整数 i に対して $-5 + i \leq 0$ かつ $1 \leq i$ が成り立つので

$$-5 + i - 1 \leq -1 \leq x \leq 1 \leq i$$

となる。よって $-5 + i - 1 \leq x \leq i$ となり、 $x \in A_i$ となる。以上より、 $[-1, 1] \subset \bigcap_{i=1}^5 A_i$ が

示された. □

注 . 図を見れば明らかなことを, なぜわざわざ数式と文章を長々とかいて証明する必要があるのか, と思ったかもしれない. これについての私の答えは次のとおり. まず, 数式と文章だけで証明をかくというのは他のどんな状況にも適用できる. というより, そもそも, 数学の証明とはそういうものなのである. 図に頼った方法にはすぐに限界がくる. 整数や高次元空間 (4次元とか無限次元とか) といったものはそもそも図にするのが難しい. まだ扱う題材が簡単で, 論理的な部分に集中できるいまのうちに, 数式と文章だけで証明をかく力を鍛えておけば, この後が楽になると思う.

もう一言. 図によって直観を得るということも非常に大切である. だから, 今言ったばかりのことと矛盾しているようだが, 積極的に図をかき, 状況を理解するための努力をして欲しい. 画家がまずスケッチをしてから絵の細部に取り掛かる様に, 数学の証明をかくときも, まず図などによって証明のスケッチ・段取りを描いてから, 数式・文章をきちんとかくことに取り掛かると良いと思う.

集合の構成要素がまた集合になっている様なものも考える.

例 7.

$$A := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

とおく. A の元は 3 つあり, それは集合 $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ である. 例えば, $\{1, 2\}$ は A の元であるから, $\{1, 2\} \in A$ が成り立つ. $\{1, 2\} \subset A$ は成り立っていないので注意しよう.

例 8. また,

$$S := \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

の様に, 集合とそうでないものが混ざっていてもよい. この場合, S の元は 1 , $\{2\}$, $\{1, 2\}$ の 3 つである. $\{2\} \in S$ が成り立つ. 集合 $\{2\}$ と実数 2 は異なるので, はっきりと区別することが大切である. $2 \in S$ は成り立っていないので注意しよう.

集合を元とする集合のなかでは, 次のものが特別な役割をもつ.

定義 9. 集合 X の部分集合全体の集合を X の **べき集合** といい, $\mathcal{P}(X)$ とかく. つまり,

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$$

注 . $\mathcal{P}(X)$ の他に, $\mathfrak{P}(X)$ や 2^X という記号も使われる. (\mathfrak{P} はドイツ文字の P . べき集合は英語では “power set”) X の部分集合を \emptyset も含めてすべて集めたものが $\mathcal{P}(X)$ である.

例 10. $X = \{1, 2, 3\}$ のとき,

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$$

となる. これを見るには, 次の様に考えればよい. いま, X は 3 つの元 $1, 2, 3$ を持つ. A を X の部分集合とすると, 1 が A に含まれるか含まれないか, どちらか二つの可能性がある. $2, 3$ についても同様である. そこで, X の元 $1, 2, 3$ のそれぞれが A に含まれるか含まれないかについては, 全部で $2^3 = 8$ 通りの可能性がある. 逆に, A に $1, 2, 3$ たちが含まれるか含まれないかを知れば, A を決定できる. 例えば,

$$A: 1 \text{ を含まない, } 2 \text{ を含む, } 3 \text{ を含む} \rightsquigarrow A = \{2, 3\}$$

ということである.

一般に, X の元の総数が n であるとき, $\mathcal{P}(X)$ の元の総数は 2^n となる. このことは, ベキ集合に 2^X という記号を使うこともあるということに反映されている.

例 11. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ である. 何故なら, 空集合 \emptyset の部分集合になれるのは \emptyset 自身しかないからである. (もし, $X \subset \emptyset$ となる集合 X があり, $X \neq \emptyset$ であるとする. X は元を持つので, $x \in X$ となる x がとれる. $X \subset \emptyset$ であるので, $x \in \emptyset$ となり, これは \emptyset が元を持たないことに矛盾する.) よって, \emptyset は \emptyset のただ一つの部分集合であり, $\mathcal{P}(\emptyset)$ はただ一つの元 \emptyset を持つ.

さらに, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ である. まず, いま得た結果 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ を代入して $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$ である. 次に, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ を求めるために, $\{\emptyset\}$ の部分集合について考える. $\{\emptyset\}$ はただ一つの元 $a := \emptyset$ を持つので, $\{\emptyset\}$ の部分集合はそれが a を含む場合は $\{a\} = \{\emptyset\}$ であり, a を含まない場合は空集合 \emptyset である. (ここで, 考えを分かりやすくするために $a = \emptyset$ と略記した.) よって, $\{\emptyset\}$ の部分集合は $\{\emptyset\}$ か \emptyset のいずれかであり, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ となる. (\emptyset と $\{\emptyset\}$ は違うことに注意しよう!)

注. ここまで, 集合はものの集まりであるという素朴な定義に基づいて説明を行ってきたが, 一つ注意が必要である. 実は, 集合全体の集まりは集合にはならない. つまり,

$$M := \{X \mid X \text{ は集合}\}$$

は集合であると仮定すると矛盾が起きるのである. これを見るため, M の部分集合

$$N := \{X \in M \mid X \notin X\}$$

を考える. 定義式の中の条件 $X \notin X$ は集合 M の元を変数とする命題である. この条件をわざわざ考えることは奇妙に見えるかもしれないが, $X \notin X$ はいつも成り立つとは限らない. 例えば, いま M は集合だから $M \in M$ が成り立ち, ゆえに $M \notin M$ は偽である.

ここで、 $N \in N$ と仮定してみよう。すると N の定義式より $N \notin N$ となる。また、 $N \notin N$ と仮定すると、 N は N の定義式をみたさないから $N \notin N$ は真ではない。そこで、 $N \in N$ となる。いずれの場合も、 $N \in N$ と $N \notin N$ の両方が成り立つことになり、排中律に矛盾する。 M は集合であると仮定したことによって矛盾が起きた。

これをラッセルのパラドクス(逆理) という。これを避けるために、集合という概念をより厳密に定義しようという試みがなされ、公理的集合論と呼ばれている。ここでは深入りはしない (例えば、“集合と位相, 岩波基礎数学選書, 彌永昌吉, 彌永健一著” を参照)。

第三回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) $A \cup B = B \cup A$ はどうして成り立つのか? また, $A \subset A \cup B$ はどうしてか?
- (2) 例 3 と例 4 の証明を復習せよ.
- (3) 定理 5(ド・モルガンの法則) について. 最初の式 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ の証明の中の一つ一つの「 \Leftrightarrow 」がどうして成り立つのか, 説明せよ.
- (4) $X = \{1, \{2\}\}$ とする. 次の 4 つの命題の真偽を答えよ.

$$(i) 1 \in X \quad (ii) \{1\} \in X \quad (iii) 2 \in X \quad (iv) \{2\} \in X$$

- (5) $Y = \{a, \{b\}\}$ とする. 次の 4 つの命題の真偽を答えよ.

$$(i) a \in Y \quad (ii) \{a\} \subset Y \quad (iii) \{b\} \subset Y \quad (iv) \{\{b\}\} \subset Y$$

- (6) $\{1, 2\}$ のべき集合を, 元を列挙する方法であらわせ.

問題 1. 以下の場合に $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A^c = X \setminus A$ を求めよ.

$$X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}, \quad A = \{x \in X \mid 1 \leq x \leq 6\}, \quad B = \{x \in X \mid 5 \leq x \leq 9\}$$

問題 2. 定理 5(ド・モルガンの法則) の二番目の式 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を証明せよ.

問題 3. A, B, C は集合とする. 以下の公式を証明せよ.

- (1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- (2) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- (3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

問題 4. 集合の共通部分, 和集合に関する次の“分配法則”を示せ.

- (1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- (2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

問題 5. $\mathcal{P}(\{1, 2\}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ を元を列挙する形で求めよ.

問題 6 (例 6 後半). $i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して閉区間 A_i を $A_i = [-5 + i - 1, i]$ と定める. このとき,

$$\bigcup_{i=1}^5 A_i = [-5, 5]$$

が成り立つことを示せ. (講義でもそうした様に, 証明をかくときは数式と文章だけを用いよ.)

第四回講義ノート

今回学ぶこと

- 論理記号「 \forall 」, 「 \exists 」を含んだ命題
- 「 $\forall x P(x)$ 」や「 $\exists x P(x)$ 」の証明の仕方
- 「 \forall 」や「 \exists 」が二つ以上出てくる場合. 語順が大切!

§ 述語論理の基本.

いくつかの命題があるとき, それらにラベルを付け, 変数を持つ命題の様に扱うことがある. 例えば, 三つの命題 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ があるとする. ここで二種類の命題を新たに考える.

- 「 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ のいずれも真である」という命題. つまり,

「任意の $x \in \{1, 2, 3\}$ に対して, $P(x)$ は真である」

これを, 次の様に略記する:

$$\forall x \in \{1, 2, 3\} \quad P(x)$$

- 「 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ の少なくとも一つは真である」という命題. つまり,

「ある $x \in \{1, 2, 3\}$ が存在して, $P(x)$ は真となる」

これを, 次の様に略記する:

$$\exists x \in \{1, 2, 3\} \quad P(x)$$

注. 「 \forall 」はアルファベットの A を逆さまにしたもので, “all” あるいは “any” を意味している. 英語では, “For any x , $P(x)$ is true” と読む. 「 \exists 」は E を逆さまにしたもので, “exists” を意味している. 英語では, “There exists an x such that $P(x)$ is true” と読む.

x の後ろの「 $\in \{1, 2, 3\}$ 」の部分は, 変数 x の動く範囲を明示するためにある. 文脈から明らかなきは, これは省かれることがある.

「任意の…」や「ある x が存在して…」は日本語として不自然だが, 英語の語順に合うように書いている. 教科書や人によって色々な表現があるが, 「任意の」「すべての」「どんな」などは全て同じ意味である. 同様に「ある x が存在して…」 「…となる x があって」 「…をみたす x が存在する」なども全て同じ意味である.

先の例では, 「 $\forall x P(x)$ 」と「 $\exists x P(x)$ 」の真理値表は次の様になる.

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$\forall x P(x)$	$\exists x P(x)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

一般に、 $P(x)$ が集合 X の元 x を変数とする命題のとき、次の二種類の命題を考える：

- 「任意の $x \in X$ に対して、 $P(x)$ は真である」これを、「 $\forall x \in X P(x)$ 」とかく。
- 「ある $x \in X$ が存在して、 $P(x)$ は真となる」これを、「 $\exists x \in X P(x)$ 」とかく。

前の例と同様に、「 $\in X$ 」の部分は省略されることもある。また、集合 X は無限個の元を持つかもしれないことに注意しておこう。

注 . $P(x)$ は x に具体的な値を入れないと真偽が定まらないが、「 $\forall x P(x)$ 」や「 $\exists x P(x)$ 」の真偽は定まる。「 $\exists x \in X P(x)$ 」が真のとき、一般には、どの $x \in X$ に対して $P(x)$ が真になっているのかまでは分からない。

「 \forall 」や「 \exists 」などの論理記号を使うと、色々なことをすっきりと述べることができる。

例 1. (1) 「どんな実数 x に対しても $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ が成り立つ」は、

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

(2) 「方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ は実数解を持つ」は、

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

(3) 「整数 a は 3 で割り切れる」は、

$$\exists b \in \mathbb{Z} \quad a = 3b$$

(文字は b でなくても良い。「 $\exists x \in \mathbb{Z} \quad a = 3x$ 」でも良い.)

(4) 「 n は奇数である」は、

$$\exists m \in \mathbb{Z} \quad n = 2m + 1$$

(5) $\mathbf{0}$ でないベクトル \vec{u} と \vec{v} に対して、「 \vec{u} と \vec{v} が平行である」は、

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad k \neq 0 \text{ かつ } \vec{v} = k\vec{u}$$

(k が 0 でないことをあらわすのに、「 $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \vec{v} = k\vec{u}$ 」とかいても良い.)

(6) 集合 A, B に対して, 「 $A \subset B$ 」は,

$$\text{「}\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B\text{」}$$

(「 $\forall x \in A \quad x \in B$ 」でも良い.)

「 $\forall x \in X \quad P(x)$ 」や「 $\exists x \in X \quad P(x)$ 」という形の命題は非常に頻繁に現れる. この様なタイプの命題が真のときに, どのように証明すれば良いか, その方法を説明しよう.

「 $\forall x \in X \quad P(x)$ 」の証明のやり方.

- (1) X の元 x が任意に与えられたとする. (以後 x は固定され, 定数とみなされる)
- (2) 次に, $P(x)$ が真であることを示す.

例 2. \mathbb{R} の元を変数とする命題

$$P(x) : x^2 - x + 1 > 0$$

を考える. このとき, 「 $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ 」は真である.

証明. $x \in \mathbb{R}$ とする. このとき,

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

となる. (ここで, 実数の自乗は 0 以上の実数となることを用いた.) よって $P(x)$ は真. \square

注. 「任意の」という言葉の意味だが, あなたが好きを選んで良いのではない. 数学の神様のような存在が「ほれっ」という感じで, 証明をするあなたに渡してくるのである.

誤答 (例 2). x は任意なので, $x = 0$ とする. このとき,

$$x^2 - x + 1 = 0^2 - 0 + 1 = 1 > 0$$

なので, $x = 0$ のとき $P(x)$ は真である. よって 「 $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ 」は真. \square

注. (1) の部分は, 「 $x \in \mathbb{R}$ とする」とか 「 x を任意の実数とする」の様にかければ良い. この部分は省略せずちゃんとかくべきである. いきなり (2) の部分をかき始めると, x という記号が何をあらわすのか, よく分からなくなってしまう.

「 $\exists x \in X \quad P(x)$ 」の証明のやり方.

- (1) ある $x \in X$ をうまく見つける.

(2) x を見つけた値に設定し, $P(x)$ が真であることを示す.

一言で言えば, これは証拠を持ってくる, という方法である. 「犯人はこの中にいる」ということの証明に, 「A さんを見て下さい. こうでしょ, こうでしょ. A さんが犯人です. だからこの中に犯人がいます」とやるのである.

「うまく見つける」という部分は, もちろん $P(x)$ が真になるように, 自分で見つけるのである. どうやってうまい x を見つけたのかは, 証明にはかく必要はない.

例 3. \mathbb{R} の元を変数とする命題

$$P(x) : x^2 - 1 > 0$$

を考えよう. 命題「 $\exists x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ 」は真である.

証明. $x = 2$ とおく. このとき, $x^2 = 2^2 = 4 > 1$ であるから $P(2)$ は真である. よって「 $\exists x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ 」は真である. \square

注 . 「 $\exists x \in X \quad P(x)$ 」というタイプの命題は, 存在定理と呼ばれる. この主張自体は, いったいどの x に対して $P(x)$ が成り立つのか, については何も言っていない.

うまい x を具体的に見つけられない場合は, ある種の存在定理が役に立つことがある.

例 4. \mathbb{R} の元を変数とする命題

$$P(x) : x^3 + x + 1 = 0$$

を考えよう. 命題「 $\exists x \in \mathbb{R} \quad P(x)$ 」は, 「3 次方程式 $x^3 + x + 1 = 0$ は実数解を持つ」という主張に同値である. ちなみに,

$$x = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{93} - 9)}}{3^{2/3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3(\sqrt{93} - 9)}}$$

がこの 3 次方程式の唯一の実数解である (チェックしてみよ!). ただ, 自分でこれを見つめるのは相当しんどいだろう. 実数解を具体的に見つけることなしに, その存在だけを証明することはできないか? ここでは, 微積分で習う中間値の定理を使って示そう.

証明. $f(x) = x^3 + x + 1$ とおく. f は連続関数であり, $f(-2) = -9 < 0$, $f(0) = 1 > 0$ である. よって, 中間値の定理より, ある実数 x_0 ($-2 < x_0 < 0$) が存在して $f(x_0) = 0$ となる. このとき, $P(x_0)$ は真である. \square

注. 「 $P(x)$ をみたす x が唯一つ存在する」を、「 $\exists!x \ P(x)$ 」と略記する。「唯一つ」の意味は、 x と x' がともに性質 P を持つならば、 $x = x'$ となる、ということである。

\forall や \exists を含んだ文章の否定の作り方:

「 $\forall x \in X \ P(x)$ 」の否定は「 $\exists x \in X \ \neg P(x)$ 」

説明: 「 $\forall x \ P(x)$ 」, つまり「全ての x に対して $P(x)$ は真である」を言い換えると、「 $P(x)$ が偽であるような x は一つもない」となる。これを否定すれば、「 $P(x)$ が偽であるような x が少なくとも一つはある」, すなわち「 $\exists x \in X \ \neg P(x)$ 」となる。

「 $\exists x \in X \ P(x)$ 」の否定は「 $\forall x \in X \ \neg P(x)$ 」

説明: 「 $\exists x \ P(x)$ 」, つまり「 $P(x)$ が真である様な x が少なくとも一つはある」を否定すると、「 $P(x)$ が真である様な x は一つもない」となる。そして、これの言い換えは「全ての x に対して $P(x)$ は偽である」となる。

例 5. A, B を集合とする。 A が B の部分集合であるとは、条件

$$\forall x \ x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成り立つことであった。この否定, つまり, 条件 $A \not\subset B$ をかくと

$$\exists x \ \neg(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

である。「 $P \Rightarrow Q$ 」の否定は「 P かつ $\neg Q$ 」であったから, 結局, 条件 $A \not\subset B$ は

$$\exists x \ x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

と言い換えられる。

ここからは変数を二つ持つ命題について考える。その様な (変数付きの) 命題から, 論理記号「 \forall 」や「 \exists 」が二つ出てくる (変数なしの) 命題がいくつか作られる。このタイプの命題は, 微積分で学ぶ ε - δ 論法をはじめとして色々な場面に出てくるので, ぜひ扱い方をマスターして欲しい。

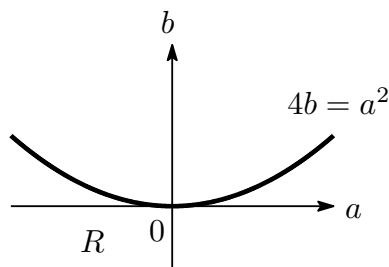
例 6 (第一回講義, 例 3). 次の, 実数 a, b を変数とする命題を考える。

$P(a, b)$: 「 x に関する 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解を持つ」

一般に, 判別式を考えることによって,

$$P(a, b) \text{ は真} \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0$$

が成立していた. 右側の不等式の表す領域を R とすると, R は ab 平面において放物線 $4b = a^2$ とその下側を合わせたものである. (下図参照.)



そこで,

$$P(a, b) \text{ は真} \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

となる. これで, (a, b) を決めるごとの $P(a, b)$ の真偽は図形的にも把握できる.

一般論に話を戻し, $P(a, b)$ を集合 A の元 a と集合 B の元 b を変数とする命題とする.

a を固定するたび, $P(a, b)$ は b を変数とする命題と考えることができる. そこで, 「 $\forall b \in B \ P(a, b)$ 」は a を変数とする命題である. (つまり, a に具体的な値が入れば, 「 $\forall b \in B \ P(a, b)$ 」の真偽が決まる.) そこで,

$$\exists a \in A \ (\forall b \in B \ P(a, b))$$

は (変数を含まない) 命題である. 以後, 式中の括弧は省略して

$$\exists a \in A \ \forall b \in B \ P(a, b) \tag{あ}$$

とかく.

また, 「 $\exists a \in A \ P(a, b)$ 」は b を変数とする命題であり, そこで

$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ P(a, b) \tag{い}$$

という命題を考えることができる.

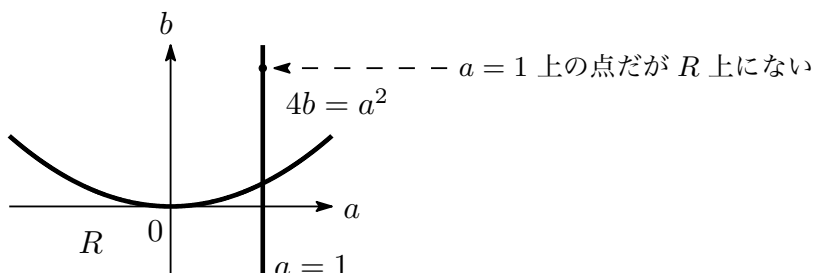
「 $\exists a \in A$ 」と「 $\forall b \in B$ 」の順序が入れ替わっただけの様だが, 一般には, (あ) と (い) は異なる命題である. 例 6 を使って, このことを分析してみよう. 例 6 では

$$P(a, b) \text{ は真} \Leftrightarrow a^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

であった. 変数 a, b は実数全体の集合 \mathbb{R} を動く.

(あ) 例えば $a = 1$ として, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \ P(1, b)$ 」という命題を考える. これを言い換えると, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \ (1, b) \in R$ 」となる. b が実数全体を動くとき, 点 $(1, b)$ は ab 平面の直線

$a = 1$ の上を動く. そこで, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \quad (1, b) \in R$ 」を図形的に言い換えると「直線 $a = 1$ が領域 R に (すっぽり) 含まれる」となる. 下図を見れば, これは偽であることが分かるだろう. 直線 $a = 1$ の“上の方”は, 領域 R からはみだしている.

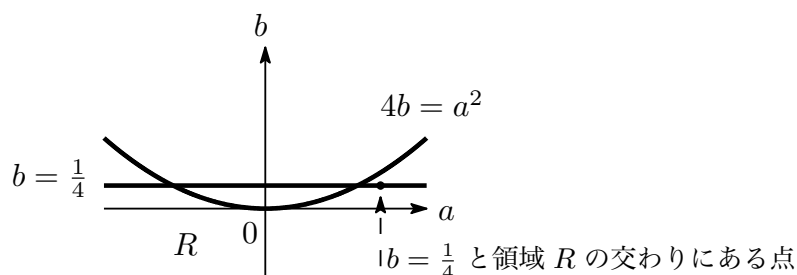


そこで, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \quad P(1, b)$ 」は偽である. a の値を $a = 2$ に変えてみて同様の考察をすれば, 今度は直線 $a = 2$ が領域 R に含まれるかどうかを考えることになり, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \quad P(2, b)$ 」も偽であることが分かるだろう. 同様に a の値を色々変えてみて, 対応する “ $a = \text{一定}$ ” の直線が領域 R に含まれるかどうかを考えてみれば, a の値をどの様にとってみてもそれが正しくないことが分かるだろう. そこで, 「 $\forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」を成り立たせる様な実数 a は存在しない. よって

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b) \quad (\text{あ})$$

は偽となる. (ちゃんとした証明をかくことは演習問題とする.)

(い) 例えば $b = \frac{1}{4}$ として, 「 $\exists a \in \mathbb{R} \quad P(a, \frac{1}{4})$ 」という命題を考える. (あ) の場合と同様に考えると, これは「直線 $b = \frac{1}{4}$ が領域 R と交わりを持つ」ということと同値であることが分かる. そして, 下図を見て分かる様に, これは真である.



b の値を色々変えて, 対応する “ $b = \text{一定}$ ” の直線が領域 R と交わりを持つかどうかを考えてみれば, b の値が何であってもそれが正しいことが分かるだろう. つまり,

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad P(a, b) \quad (\text{い})$$

は真である. 以上の考察を踏まえ, きちんと証明をかいてみよう. 証明したい命題 (い) は 「 $\forall b \in \mathbb{R} \dots$ 」 の形をしているので, 証明は「任意に b をとる」ことから始める. その後, b

の値の可能性によって場合分けをする.

例 6 で (i) が真であることの証明. $b \in \mathbb{R}$ とする.

(i) $b \leq 0$ のとき. $a_0 := 0$ とおくと $D = a_0^2 - 4b = -4b \geq 0$ なので $P(a_0, b)$ は真.

(ii) $b > 0$ のとき. $a_0 := \sqrt{4(b+1)}$ とおくと $D = a_0^2 - 4b = 4(b+1) - 4b = 4 > 0$ なので $P(a_0, b)$ は真. □

注 . 証明の段取りを確認. 「 $b \in \mathbb{R}$ とする」の後は, b を定数として取り扱いながら「 $\exists a \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の証明を行っている.

注 . (1) \forall や \exists を含んだ文章を扱うときは, 語順がとても大切である!

(2) ただし, 「 \forall 」だけが続く場合はその順番を入れ替えても良い. 例えば,

$$\left[\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad P(a, b) \right] \Leftrightarrow \left[\forall b \in B \quad \forall a \in A \quad P(a, b) \right]$$

となる. 「 \exists 」についても同じことが言えて,

$$\left[\exists a \in A \quad \exists b \in B \quad P(a, b) \right] \Leftrightarrow \left[\exists b \in B \quad \exists a \in A \quad P(a, b) \right]$$

となる.

注 . \forall や \exists が複数出てくる条件の否定を作るときは, \forall や \exists が 1 つだけのときの条件の否定の法則を繰り返し使えば良い. 例えば, 「 $\exists a \in A \quad \forall b \in B \quad P(a, b)$ 」の否定を作るなら,

$$\begin{aligned} & \neg(\exists a \in A \quad (\forall b \in B \quad P(a, b))) \\ \Leftrightarrow & \forall a \in A \quad \neg(\forall b \in B \quad P(a, b)) \\ \Leftrightarrow & \forall a \in A \quad \exists b \in B \quad \neg P(a, b) \end{aligned}$$

とすればよい. 機械的に, \exists と \forall , P と $\neg P$ を入れ替えると覚えてもよい.

今回の講義で説明した「 \forall 」や「 \exists 」は, 集合を定義するときにもよく使われる. 式の読み方の練習を兼ねて, 一つ例を挙げる.

例 7. 第二回講義の例 7 で, 奇数全体の集合 O を

$$O = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

とかけることを説明した. 一方, 例 1 (4) で見たように「 n が奇数である」は「 $\exists m \in \mathbb{Z} \quad n = 2m + 1$ 」とあらわせる. そこで,

$$O = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \quad n = 2m + 1\}$$

ともかける. O の二通りのあらわし方を比べてみよう.

第四回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) 「 m は 4 の倍数である」を論理記号「 \exists 」を用いてあらわせ.
- (2) 例 2 の誤答の間違いを指摘せよ.
- (3) 例 4 において,

$$x = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{93}-9)}}{3^{2/3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3(\sqrt{93}-9)}}$$

が $x^3 + x + 1 = 0$ の実数解になっていることを確認せよ. また, これが唯一の実数解であるのはなぜか? (ヒント: $f(x) = x^3 + x + 1$ の微分を考えよ.)

- (4) 命題「 $\forall x \in X \quad 3 < x < 10$ 」の否定を分かりやすくかけ.
- (5) 命題「 $\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad P(a, b)$ 」の否定を分かりやすくかけ.

問題 1. 次の「 \quad 」の中にかかれた条件を論理記号 (\forall, \exists) を用いてあらわせ.

- (1) 整数 m, n (ただし $n \neq 0$) について, 「 m は n で割り切れる」
- (2) 整数 n について, 「 n は 3 で割ると 1 余る」
- (3) 「任意の実数 x, y に対して, $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ が成り立つ」
- (4) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ と実数 x_0 について, 「 $f(x)$ は $x = x_0$ で最大値をとる」

問題 2. 次の命題を証明せよ.

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 1 > 0$
- (2) $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2024 < 0$
- (3) $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^3 < x < x^2$

問題 3 (例 6). 次の, 実数 a, b を変数とする命題を考える.

$P(a, b)$: 「 x に関する 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解を持つ」

- (1) 命題「 $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の否定を分かりやすくかけ.
- (2) 命題「 $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」は偽であることを証明せよ. (ヒント: この命題の否定を証明すれば良い.)
- (3) 命題「 $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の真偽を判定し, 証明せよ.
- (4) 命題「 $\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の真偽を判定し, 証明せよ.

(5) 命題「 $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の真偽を判定し、証明せよ.

(6) 命題「 $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad P(a, b)$ 」の真偽を判定し、証明せよ.

注 . (3)~(6) について. 「 $\sim\sim$ の真偽を判定し、証明せよ」という問いは、「 $\sim\sim$ を証明せよ」という問いよりも一段上のレベルの問いである. 後者の問いでは、「 $\sim\sim$ 」が真であることは前提となっている. 一方, 前者の問いでは、「 $\sim\sim$ 」が正しいかどうかをまず判定しなくてはならない. その後, 「 $\sim\sim$ は真である」と判定したらならばその証明を行い, 「 $\sim\sim$ は偽である」と判定したならばその証明を行う. (判定を間違えれば, 当然証明はうまく行かないはずである.)

問題 4. (1) 次の集合 A を元を全て列挙する形で表せ.

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \quad nm = 24\}$$

(2)

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad xy \geq 0\}$$

とおく. このとき, $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ となることを示せ. (ただし, $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$)

(3) $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 10, 13\}$ とおく. さらに

$$B = \{x \in A \mid \exists y \in A \quad \exists z \in A \quad x = y + z\}$$

とおく. 集合 B を元を全て列挙する形であらわせ. (ヒント: 落ち着いて, B の定義を読もう. 例えば, $2, 3 \in A$ であり $5 = 2 + 3$ なので $5 \in B$ である.)

第五回講義ノート

今回学ぶこと

- 写像の定義.
- 写像の例.
- 写像の合成.

§ 写像の概念.

写像は、関数の一般化である。まずは関数についての復習から始めよう。

関数といえば、 $y = x^2 + 1$ や $f(x) = x^2 + 1$ の様な式でかかれたものをまず思い浮かべよう。 x に具体的な値を入れると、式を使って計算することで y や $f(x)$ の値が定まる。例えば、 $f(x) = x^2 + 1$ のときは

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10, \quad f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

の要領である。一つの式でかけていなくても、例えば

$$y = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

の様に場合分けでかけられる関数もある。高校までの数学で、2次関数、3次関数の他に三角関数 $\sin \theta$, $\cos \theta$ や指数関数 e^x , 対数関数 $\log x$ などを学んだはずである。

式から離れて、関数の性質として、 x に具体的な値を入れると何か定まった値 $f(x)$ が出てくる、という点に着目しよう。そこで、関数とは、入力 x に対して出力 $f(x)$ を返すという“対応そのもの”であると解釈する。どの様な値を入力に使うと良いのか、どの様な値が出力されるのかは関数ごとに決まっていて、それぞれ定義域、値域と呼ばれる。例えば $f(x) = \sqrt{x}$ ならば x には0以上の実数を入れることができ、 \sqrt{x} も0以上の実数となるので、定義域と値域はそれぞれ0以上の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$ と考えるのが自然である。ただし、式の形から関数の定義域と値域が自動的に決まる訳ではなく、状況によっては別のものを考えることもある。

注 . いま着目している、関数の“対応”という側面にはあまり馴染みがないかもしれない。しかし、実は似たようなものには既に出会っている。それは、 x を変数とする命題 (あるいは x についての条件) $P(x)$ の考えである。この場合、 x に具体的な値を入力すると、 $P(x)$ の真偽として「真」か「偽」のどちらかが出力される。

関数は“対応そのもの”であるという観点に立てば、入力や出力はいわゆる“数”でなくとも良く、もっと広く考えることが可能である。こうして、次の写像の定義に達する。

定義 1 (写像の定義). X, Y を集合とする. (X が入力側, Y が出力側の集合である.)

X の各元に対し, Y の元を唯一つ対応させる規則のことを X から Y への**写像**という. f が X から Y への写像であるとき,

$$f: X \longrightarrow Y$$

とあらわす. 写像 f によって $x \in X$ に対応する Y の元を $f(x)$ とかく.

$$f: X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

の様にもかく. X を f の**定義域**(始域), Y を f の**値域**(終域) という.

注. これからは関数をあらわすのに単に f とかく. $f(x)$ は f の x における値をあらわす.

定義 1 の大切な点は, ある写像に同じ入力を行えば必ず同じ出力が得られるということである. それが「 X の各元に対し, Y の元を唯一つ対応させる」という部分である. ある値を甲さんが入力したときと, 乙さんが入力したときに出力が違っては困る. また, ある値を入力したときに何も出力されないとか, 二つ以上のものが出力がされる様でも困る. 例えば, 実数 x に対して

$$f(x) := \text{「二乗すると } x \text{ になる実数」}$$

という“対応”の規則を定めたとする. このとき, $f(-1)$ は「二乗すると -1 になる実数」であり, そんなものはないから何も出力することができない. また, $f(4)$ は「二乗すると 4 になる実数」であるが, それは $+2$ と -2 の二つある. よって, この f は \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像ではない.

定義 2 (写像の相等). $f: X \longrightarrow Y$ と $g: X \longrightarrow Y$ を写像とする. すべての $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ が成り立つとき, f と g は**写像として等しい**といい, $f = g$ とかく.

注. 定義 2 の意味を説明しておく. 例えば,

$$f(x) = (x - 1)^2, \quad g(x) = 1 - x$$

という二つの式を考える.

まず, x は実数全体を動くと考え. つまり, f や g を \mathbb{R} を定義域とする写像

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

とみる. このとき, f と g は異なる写像である. 例えば, $x = 2$ における値が $f(2) = 1$, $g(2) = -1$ で異なるからである. また, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが違うことから確認できるであろう.

次に, $X = \{0, 1\}$ とし, f と g を X を定義域とする写像とみる. つまり, f や g を写像

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

の様に見ることにする. いま,

$$f(0) = g(0) = 1, \quad f(1) = g(1) = 0$$

なので, f と g は定義域 $X = \{0, 1\}$ のどの元に対しても同じ値をとる. 式の形は違えども, 同じ入力に対して f と g は常に同じ値を出力するので, 対応の規則としては同じとみる. そこで, X から \mathbb{R} への写像としては $f = g$ である.

以下, 写像の例を挙げていく.

例 3. (一変数) 関数 $y = f(x)$ は, 実数 x に対し実数 $f(x)$ を対応させる写像である. ただし, 定義域と値域については正確に指定しておく必要がある. 例えば, $y = x^2 + 1$ について, 入力として実数全体の集合 \mathbb{R} をとれば

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$$

という写像が得られる. 入力として 0 以上の実数だけを考えるという状況ならば,

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$$

という写像が得られる. ここで, $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ である. 式の形は同じだが, 定義域が異なるので, f と g は写像としては異なる. また, 任意の実数 x に対して $x^2 + 1 \geq 0$ が成り立つことに注意すると,

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2 + 1$$

という写像もできる. 値域が異なるので, 写像としての h は f と g と異なる.

注. 例 3 での f, g, h の相違は少しやかましいと思われたかもしれないが, 式と関数 (写像) を区別して考えることがとてもとても大切なのである. 写像を考えるときは, 定義域と値域が何であるかに常に注意をしておこう.

とはいえ, 例 3 での f, g, h は定義域や値域が違うだけである. その様な写像たちにいちいち違う記号を用意するのでは, 記号がいくらあっても足りない. そこで, この様な状況で

は, 全て同じ記号を用いることもしばしばある. ただし, 混乱のもとにもなるので, テキストを読んだり自分で文章をかく際には注意しよう.

例 4. 二つの実数 x, y に対して, それらの和 $x + y$ と積 xy が定まっていた. これらを, 二つの実数の組から一つの実数を対応させる規則とみなせば, 二種類の写像

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto x + y \\ s: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

ができる. (ちょっと格好悪いが, 写像の名前は和 (wa) と積 (seki) からとった.) 記法を簡単にするため, 括弧を省略して $w((x, y))$ のかわりに $w(x, y)$ の様にかく. つまり,

$$w(x, y) = x + y, \quad s(x, y) = xy$$

である. (この様な略記法は微積分で多変数の関数を扱うときによく使う.)

例えば, 足し算の交換法則「 $x + y = y + x$ 」は w を使って

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad w(x, y) = w(y, x)$$

とあらわせる.

\mathbb{R} を整数全体の集合 \mathbb{Z} や有理数全体の集合 \mathbb{Q} に取り換えても, 同様に和と積を写像として扱うことができる. こうして, 数の世界の演算は写像とみなせる.

次の例を挙げる前に, 複素数と複素数平面について復習しよう.

二つの実数 x, y を用いて

$$z = x + iy$$

の形にかける“数”のことを**複素数**といった. ここで, i は虚数単位と呼ばれる. x を z の**実部**といい, $\operatorname{Re}(z)$ とかく. y を z の**虚部**といい, $\operatorname{Im}(z)$ とかく.

複素数全体のなす集合を \mathbb{C} とかく:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

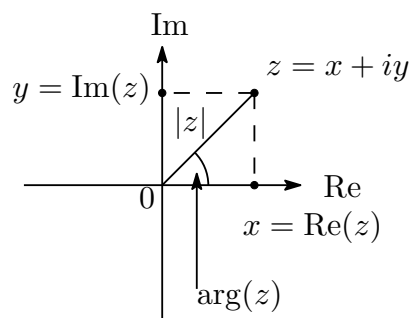
実数 x を複素数 $x + i0$ と同一視することで, 実数全体の集合 \mathbb{R} は \mathbb{C} の部分集合となる:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

一つの複素数を決めるためにはその実部と虚部である二つの実数を決めればよい. そこで, \mathbb{C} は \mathbb{R}^2 と同一視することができる:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\stackrel{“=”}{=} \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\leftrightarrow (x, y) \end{aligned}$$

(“同一視” とか “=” のより正確な意味は, 第七回講義で全単射の概念を説明するとき明らかになる.) このことを図形的にあらわしたものが**複素数平面**であり, 複素数 $z = x + iy$ は平面上の点 (x, y) とみなされる.



複素数 z の**絶対値**を $|z|$ とかく. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) のとき, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ であった. 上図に示したとおり, $|z|$ の図形的意味は, 複素数平面での原点と z との距離である. また, 複素数 z の**偏角**を $\arg z$ とかく. 上図の様に, $\arg z$ は, 実軸正の部分から原点と z を結ぶ半直線までの反時計回りの回転角をあらわす. $\arg z$ は 2π の違いを除いて定まるので, $0 \leq \arg z < 2\pi$ となる様に約束する. ただし, $z = 0$ のときは偏角は定められない.

また, 複素数も一種の数の世界であり, 演算を持つ. 二つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ に対して, それらの和と積はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

と定められていた.

例 5. 以上の複素数の説明に現れた様々な記号は, みな写像とすることができる.

- (1) 複素数 z に対して実数 $\operatorname{Re}(z)$ や $\operatorname{Im}(z)$ が対応していると思えば, 次の二つの写像が定義される:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}, & z &\mapsto \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}, & z &\mapsto \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

- (2) 複素数 z に対し, その絶対値を対応させることで次の写像が得られる:

$$|\cdot|: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|$$

ここで, $|z|$ は常に 0 以上の実数であるから, 値域は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に取り換えても構わない.

- (3) 偏角 $\arg z$ も写像と思うことができる。ただし、 $z = 0$ のときは偏角は定められないので、定義域は \mathbb{C} から 0 を除く必要がある。こうして、

$$\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

という写像が定まる。 $(0 \leq \arg z < 2\pi)$ の約束がなければ $\arg(z)$ は唯一つに定まらず、写像が定義できない！一方で、この約束は人工的なものであり、実は、 $\arg(z)$ は値がただ一つに定まらない“多価関数”であると考えた方が良い場合もある。将来、複素解析を学ぶとそのことが分かるだろう...)

- (4) 例 4 と同様に、複素数の和と積も写像とみなすことができる：

$$\begin{aligned} w: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, & (x, y) &\mapsto x + y \\ s: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, & (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

次の例の様に、元の行先を一つ一つ手で決めても良い：

- 例 6.** 集合 $\{1, 2, 3\}$ から集合 $\{a, b, c\}$ への写像 $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c\}$ を

$$f(1) = b, \quad f(2) = a, \quad f(3) = c$$

により定める。

少し変わった例も挙げておこう。

- 例 7.** $a_n = 2n + 1$, $a_n = 3^n$ の様な数列も写像と考えられる。実際、数列とは、各番号 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して数 (実数や複素数) が定まったものである。実数列 (a_n) は、写像

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

とみなせる。

最後に、一般論にとって基本的な写像を導入しておく。

- 例 8.** (1) X を集合とする。

$$\text{id}_X: X \longrightarrow X, \quad \text{id}_X(x) = x$$

を X 上の恒等写像という。(英語では“identity mapping”) 要するに、これは「なにもしない」写像なのだが、色々な状況を説明するのに役に立つこともある。

- (2) A, B を集合, $A \subset B$ とする。

$$i: A \longrightarrow B, \quad i(a) = a$$

を**包含写像**という。 A の元を, B の元と思い直すということである。これもほとんど「なにもしない」写像なのだが, 役に立つこともある。

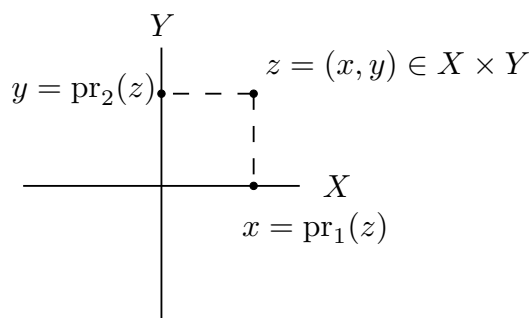
(3) 集合 X と Y の直積集合 $X \times Y$ を考える。(第二回講義, 定義 8 を参照。) このとき, 写像

$$p_1: X \times Y \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x$$

を第一成分への**射影**という。同様に, 第二成分への射影も定義される:

$$p_2: X \times Y \longrightarrow Y, \quad (x, y) \mapsto y$$

直積集合 $X \times Y$ は, 射影 p_1, p_2 と一緒に考えるのが良い。その雰囲気をあらわしたものが下図である。



注 . 写像の概念は数学の至る所に現れる。現時点では扱える例に限られるが, 微積分や線形代数において多変数の対象を学ぶときに, より多くの例に出会うだろう。

注 . $f: X \longrightarrow Y, x \mapsto f(x)$ とかくが, 二種類の矢印 \longrightarrow と \mapsto の違いに注意しよう。 \longrightarrow の方はどの集合からどの集合への写像かをあらわし, \mapsto の方は元の対応をあらわす。

高校で微積分を学んだとき, 関数 $\sqrt{\cos x}$ を微分せよ, という様な問題を解いたと思う。この様な関数の微分には合成関数の微分法を使うのであった:

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x)$$

$g(f(x))$ の様な形の関数を f と g の合成関数とよぶ。写像についても同じようなことができ, 二つの写像を合成することができる。ただし, $\sqrt{\cos x}$ を考えるときには $\sqrt{\quad}$ の中身が負にならない範囲を考えるとかの注意が必要であった様に, 写像を合成するときにも, 関係する写像の定義域・値域によく注意を払うことが大切である。

定義 9.

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

を f と g の **合成写像** という.

注. まず, f と g を合成するためには, f の値域と g の定義域が同じでなければならないことに注意しよう. また, これは記法の問題だが, 「 f と g の合成」が「 $g \circ f$ 」とかかれる. 順序の逆転に注意しよう. 次の様な図を意識しておくとうまいだろう.

$$g \circ f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

例 10. 二つの写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ および $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$ を考える. このとき, 合成写像 $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が定義される. $x \in \mathbb{R}$ における値はそれぞれ次の様になる:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1, \\ f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

例 11. 二つの写像 $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ および $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f_2(x) = x^2$ を考える. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は \mathbb{R} の部分集合である. $i: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ を包含写像とする. このとき, \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像として

$$f_1 = i \circ f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

例 12. $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A \subset X$ とする. このとき, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ と f を合成し,

$$f \circ i: A \rightarrow Y, \quad a \mapsto f(a)$$

という写像が得られる. これを, f の A への**制限写像**といい, $f|_A$ という記号であらわす. f の定義域を X から A に制限して得られる, という意味である.

定理 13 (写像の合成の結合法則). 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ に対して,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$$

証明. $x \in X$ とする.

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

となり, どちらの写像も $x \in X$ を同じ元 $h(g(f(x)))$ に対応させる. よって X から W への写像として $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる. (定義 2 も参照せよ.) \square

最後に, 補足事項として, 写像のグラフについて説明しておく.

定義 14. 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, f の グラフ とは次で定まる $X \times Y$ の部分集合である:

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

$\Gamma = \Gamma_f$ は, 次の性質を持っている:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad (x, y) \in \Gamma$$

逆に, この様な性質を持つ Γ が与えられたとする. このとき, $x \in X$ に対して $(x, y) \in \Gamma$ となる様な唯一つの $y \in Y$ をとり, $f(x) := y$ とおけば写像 $f: X \rightarrow Y$ が定義される.

説明を抽象的に感じたかもしれないが, 実は, 高校までの数学で関数 $y = x^2$ のグラフと言うときと同じものを考えているのである. $y = x^2$ のグラフは, xy 平面において $y = x^2$ をみたく様な点を全て集めて図にしたものであった. つまり, それは,

$$\{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

を図にしたものである. この集合は, 定義 14 の意味での, 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ のグラフ Γ_f に他ならない.

こうして, X から Y への写像を $X \times Y$ の特別な部分集合としてとらえることができる. そこで, 写像についての色々な主張は全て集合の言葉に直すことが原理的には可能である. 例えば, 二つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ について, 次が成り立つ.

$$f = g \text{ (写像として)} \Leftrightarrow \Gamma_f = \Gamma_g \text{ (} X \times Y \text{ の部分集合として)}$$

しかし, 全てを集合の言葉に直した方が良い理由は実用上も理論上も無い. こうした解釈もあるということを心に留めてもらえばそれで充分である.

第五回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) 複素数 $z = x + iy$ について, z^2 の実部と虚部を求めよ. z^3 の実部と虚部も求めよ.
- (2) \mathbb{R} 上の恒等写像を $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $\text{id}_{\mathbb{R}}(2)$ を求めよ. $\text{id}_{\mathbb{R}}(a^3)$ を求めよ.
- (3) 二つの写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ および $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^2 + 1$$

と置いて定める. 合成写像 $g \circ f$ および $g \circ g$ をそれぞれ式で表せ.

- (4) 定理 13 の証明の中で, 一つ一つの「=」がどうして成り立つのか, 説明せよ.

問題 1. 複素数平面において, 次の集合を図示せよ.

- (1) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$
- (2) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 1\}$
- (3) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}\} \cup \{0\}$
(ただし, $\arg z$ は $0 \leq \arg z < 2\pi$ となる様にとると約束する.)
- (4) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0 \text{ かつ } \text{Im}(z) < 0\}$
- (5) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0 \text{ または } \text{Im}(z) < 0\}$

問題 2. 例 4 の様に実数の和と積をあらわす写像

$$\begin{aligned} w: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto x + y \\ s: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

を考える. 以下の演算の法則を, w と s と論理記号「 \forall 」を用いてあらわせ.

- (1) 積の交換法則: $xy = yx$
- (2) 和の結合法則: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (3) 積の結合法則: $(xy)z = x(yz)$
- (4) 積と和の分配法則: $x(y + z) = xy + xz$
- (5) 0 は何に足しても効果がない: $0 + x = x + 0 = x$
- (6) 1 は何に掛けても効果がない: $1x = x1 = x$

問題 3. 前問に引き続き, 実数の和と積をあらわす写像 w と s を考える. 例えば, $x^2 + 2$ という多項式は, w と s を用いて $x^2 + 2 = w(s(x, x), 2)$ とかける. 実際,

$$w(s(x, x), 2) = w(xx, 2) = w(x^2, 2) = x^2 + 2$$

となるからである. これを踏まえ, 以下の文字式を w, s と x, y, \dots を用いてあらわせ.

- (1) x^3
- (2) $3x^2 + 2x + 1$
- (3) $5xy + 1$
- (4) $xyz + xy + z$

問題 4. 自然数 n に対して $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ とおく. n 文字の置換とは, 写像

$$\sigma: X_n \longrightarrow X_n$$

であって, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して $i \neq j$ ならば $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ をみたすものをいう. 要するに, n 文字の置換とは, n 文字 $1, \dots, n$ の並び替えである. 置換 σ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

の様に, 番号 i の真下にその σ による行先をかいてあらわす. 例えば, $\tau(1) = 2, \tau(2) = 3, \tau(3) = 1$ で定まる 3 文字の置換 τ に対しては,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

- (1) τ は上で定義したものとし, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. 合成写像

$$\alpha \circ \tau: X_3 \rightarrow X_3, \quad \text{および} \quad \tau \circ \alpha: X_3 \rightarrow X_3$$

による $1, 2, 3$ の行先を調べよ. その結果, $\alpha \circ \tau \neq \tau \circ \alpha$ であることを確かめよ.

- (2) 3 文字の置換を全て書き上げよ.
- (3) n 文字の置換は全部でいくつあるか?

第六回講義ノート

今回学ぶこと

- 写像の像と逆像の定義.
- 像と逆像に関する様々な公式.
- 単射であること・全射であることの定義.

§ 写像の性質.

関数 $y = f(x)$ が与えられると, $f(x)$ の最大値・最小値は何か, より詳しく, $f(x)$ の取り得る値の範囲は何か, などを調べる. また, 方程式 $f(x) = a$ があつたら, その解はどれ位あるか, ということ調べる. こうしたことを一般化したものが, 写像の像と逆像である.

定義 1. $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A \subset X$ とする.

f による A の 像とは, 次で定義される Y の部分集合である:

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in A \quad f(x) = y\} \end{aligned}$$

特に, $A = X$ として, $f(X)$ のことを単に f の像という.

つまり, 像 $f(A)$ とは, x が A の中を動き回るときに, $f(x)$ が取り得る値を全て集めて得られる集合である. より実際的には, 像に関する論証では次の事実をしばしば用いる.

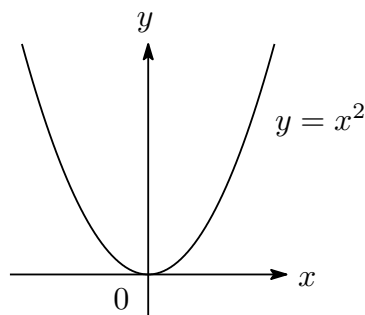
- Y の元 y が $y = f(x)$, $x \in A$ という形をしていれば, $y \in f(A)$ である. 特に, $a \in A$ ならば $f(a) \in f(A)$ が成り立つ.
- $y \in f(A)$ とすると, ある $x \in A$ が存在して $y = f(x)$ とかける.

注. $f(A)$ の定義の二通りのかき方については, 第二回講義の例 7, 第四回講義の例 7 も参考にせよ.

例 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とする. このとき,

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

となる. まず, このことは $y = f(x)$ のグラフをかいてみれば視覚的には分かるだろう. x が実数全体を動くとき, $f(x) = x^2$ は 0 以上の実数全体を動くので, f の像は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ に一致する. 下図を参照せよ.



二つの集合が等しいことの定義に従って, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ をきちんと示してみよう.

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ の証明: $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset f(\mathbb{R})$ をそれぞれ示せば良い.

まず, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ を示す. $y \in f(\mathbb{R})$ とする. ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して, $y = f(x)$ とかける. $f(x) = x^2$ であり, 実数の自乗は常に 0 以上であるから, $y = x^2 \geq 0$ となり, $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が分かる. 以上より, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ である.

次に $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset f(\mathbb{R})$ を示す. $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. $x := \sqrt{y}$ とおく. $x \in \mathbb{R}$ であり, $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$ となる. よって, $y \in f(\mathbb{R})$ となる. \square

注. 例 2 の証明のポイントは次の二つの事実であった:

- 実数の自乗は 0 以上の実数となる.
- 0 以上の実数に対して, その平方根がとれる.

それぞれ, 証明のどの部分でどう使われているのかを確認しておこう.

写像の像をとるという操作と, 集合の共通部分, 和集合をとるという操作にはある関係が成り立っている. それをまとめておく.

定理 3 (像の基本公式). $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A_1, A_2 \subset X$ とする. このとき,

- (1) $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
- (2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- (3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

証明. (2) のみ証明し, 他は演習問題にまわす.

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ を示すには, $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ と $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ をそれぞれ示せば良い.

まず, $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ を示す. $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする. ある $x \in A_1 \cup A_2$

が存在して $y = f(x)$ となる. ここで, $x \in A_1$ または $x \in A_2$ である.

$x \in A_1$ のときは $y = f(x) \in f(A_1)$ となる.

$x \in A_2$ のときは $y = f(x) \in f(A_2)$ となる.

よって $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ が成り立つので, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. 以上で $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ が示された.

次に $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ を示す. $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ とする. $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ である.

$y \in f(A_1)$ のとき. ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$ となる. $x \in A_1 \cup A_2$ でもあるので, $y \in f(A_1 \cup A_2)$ となる.

$y \in f(A_2)$ のときも同様にして $y \in f(A_1 \cup A_2)$ となる.

よって, いずれの場合も $y \in f(A_1 \cup A_2)$ となる. 以上で $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ が示された. □

定義 4. $f: X \rightarrow Y$ を写像, $B \subset Y$ とする.

f による B の逆像とは, 次で定義される X の部分集合である:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

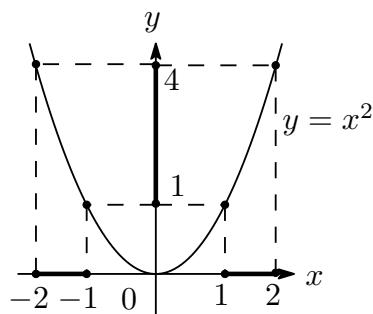
つまり, 逆像 $f^{-1}(B)$ とは, f でうつした結果が B に含まれる様な X の元を全て集めて得られる集合である. より実際的には, 逆像に関する論証では次の事実をしばしば用いる.

- X の元 x が $f(x) \in B$ をみたせば, $x \in f^{-1}(B)$ である.
- $x \in f^{-1}(B)$ ならば, $f(x) \in B$ が成り立つ.

例 5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とする. このとき,

$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

となる. 条件 $f(x) \in [1, 4]$ は $1 \leq f(x) \leq 4$ と同値であるから, $f^{-1}([1, 4])$ は, $f(x)$ の値が 1 以上 4 以下である様な実数 x を集めてえられる集合である. $y = f(x)$ のグラフから, $1 \leq f(x) \leq 4$ となる様な x の範囲は「 $-2 \leq x \leq -1$ または $1 \leq x \leq 2$ 」であることが見て分かるだろう. 下図参照.



二つの集合が等しいことの定義に従って, $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ を示そう.

$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ の証明: 実数 x に対して

$$\lceil 1 \leq x^2 \leq 4 \rceil \Leftrightarrow \lceil -2 \leq x \leq -1 \text{ または } 1 \leq x \leq 2 \rceil$$

が成り立つことに注意する. よって, 次の条件としての同値性が成立する:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([1, 4]) &\Leftrightarrow f(x) \in [1, 4] \\ &\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ または } 1 \leq x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [1, 2] \end{aligned}$$

従って, $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ である. □

注. 上の証明では, 同値変形をうまく行うことにより, $x \in f^{-1}([1, 4])$ という条件を言い換えることができ, 答えに到達した. 特に, 不等式 $\lceil 1 \leq x^2 \leq 4 \rceil$ がちゃんと解けた, ということが大きい. この様な方法はいつもうまく行くとは限らないので, 注意すること. 集合の等式 $A = B$ を示すときの基本は, $A \subset B$ と $B \subset A$ のそれぞれを示すことである.

例 6. 第二回講義の例 11 から, 単位円周 S^1 と単位円板 D^2 を思い出そう. それぞれ,

$$\begin{aligned} S^1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ D^2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

と定義されていた. ここで, 写像

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

を考える. $x^2 + y^2$ という式が, S^1 と D^2 の定義式の中に現れていることに注目しよう. このとき,

$$S^1 = f^{-1}(\{1\}), \quad D^2 = f^{-1}([0, 1])$$

となる. 実際, 逆像の定義により

$$f^{-1}(\{1\}) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid f(P) \in \{1\}\}$$

であるが, $f(P) \in \{1\}$ は $f(P) = 1$ と同値であるから,

$$f^{-1}(\{1\}) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid f(P) = 1\}$$

となる. $P = (x, y)$ とかくと $f(P) = x^2 + y^2$ となるので, 結局

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

となり, S^1 の定義式と比べると $f^{-1}(\{1\}) = S^1$ であることが分かる. D^2 については演習問題としよう.

写像の逆像をとるという操作についても, 定理 3 と似たような公式がある. 似た形をしているが, 細かい違いもあるので注意すること.

定理 7 (逆像の基本公式). $f: X \rightarrow Y$ を写像, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき,

- (1) $B_1 \subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- (2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- (3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

証明. (1) のみ証明し, 他は演習問題とする.

$B_1 \subset B_2$ を仮定する. $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ を示せば良い.

$x \in f^{-1}(B_1)$ とする. $f(x) \in B_1$ が成り立つ. $B_1 \subset B_2$ であるから, $f(x) \in B_2$ が得られる. よって $x \in f^{-1}(B_2)$ となる. 以上で $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ が示された. \square

像をとる操作と逆像をとる操作を繰り返すと, 何が起こるだろうか.

定理 8. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) $B \subset Y$ のとき, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つ.
- (2) $A \subset X$ のとき, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つ.

証明. (1) $y \in f(f^{-1}(B))$ とする. ある $x \in f^{-1}(B)$ が存在して, $y = f(x)$ とかける. $x \in f^{-1}(B)$ であるから $f(x) \in B$ である. よって, $y = f(x) \in B$ となる. 以上で $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が示された.

(2) $a \in A$ とする. $f(a) \in f(A)$ となる. よって $a \in f^{-1}(f(A))$ となる. 以上より, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が示された. \square

注. 定理 8 (2) の証明で, 「 $f(a) \in f(A)$ 」から「 $a \in f^{-1}(f(A))$ 」が導かれるところが少し分かりにくいかもしれない. $B := f(A)$ とおいてみよう. すると, $f(a) \in B$ であるから $a \in f^{-1}(B)$ となる. $B = f(A)$ を代入すると $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$ となり, 結局 $a \in f^{-1}(f(A))$ が得られる.

注. 定理 3 の (3), 定理 8 の (1) (2) においては “ \subset ” が成り立つが, 等号は一般には成り立たない. 演習問題を参照のこと.

次に, 全射と単射の概念を説明する.

定義 9. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

次の条件が成り立つとき, f は**全射**であるという.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad y = f(x)$$

注. 「 $\exists x \in X \quad y = f(x)$ 」は「 $y \in f(X)$ 」を意味するから, f が全射であるための条件は「 $\forall y \in Y \quad y \in f(X)$ 」つまり「 $Y \subset f(X)$ 」と同値である. 「 $f(X) \subset Y$ 」はいつでも成り立つから, 結局, f が全射であることと, $f(X) = Y$ が成り立つことは同値である.

f が全射であることの証明のやり方.

- (1) $y \in Y$ を任意にとる.
- (2) $x \in X$ をうまくみつける.
- (3) $f(x) = y$ が成り立っていることを示す.

(2) と (3) は, $f(x) = y$ という “方程式” が解を持つことを示すことに相当する.

例 10. 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ を考える. (実数の自乗は 0 以上だから, 値域を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ にできる.) このとき, 写像 f は全射である. (値域を \mathbb{R} にすると全射ではない!)

証明. $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. $x := \sqrt{y}$ とおけば, $x \in \mathbb{R}$ となる. さらに, $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$ となる. □

注. 例 10 の証明を分析すると,

- (1) 「 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする」
- (2) 「 $x := \sqrt{y}$ とおく」
- (3) 「 $f(x) = \dots y$ となる」

という三段階に分かれる。(1)で y をとった時点で、 y は定数として扱われることに注意する。そこで、(2)で x をうまくとるとき、 x は y に依存する可能性がある。(この例では x は y の“式”になっている。)

定義 11. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。

次の条件が成り立つとき、 f は**単射**であるという。

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

注. 条件「 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 」の対偶をとれば、「 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ 」となる。そこで、 f が単射であることを言い換えると、「 f は X の相異なる元を常に相異なる元にうつす」となる。

f が単射であることの証明のやり方.

- (1) $x_1, x_2 \in X$ を任意にとり、 $f(x_1) = f(x_2)$ を仮定する。
- (2) $x_1 = x_2$ であることを示す。

逆に、 f が単射でないことを示すには、「 $x_1 \neq x_2$ かつ $f(x_1) = f(x_2)$ 」となる様な x_1, x_2 の例を挙げればよい。

例 12. 写像 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ を考える。 f は単射である。

証明. $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とし、 $f(x) = f(y)$ とする。このとき、 $x^2 = y^2$ となる。移項して、因数分解することによって $(x+y)(x-y) = 0$ となる。よって $x+y=0$ または $x-y=0$ 。

$x+y=0$ のとき、 $x, y \geq 0$ より $x=y=0$ となる。

$x-y=0$ のとき、 $x=y$ となる。

いずれの場合も、 $x=y$ が得られる。よって「 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ 」が示せたので、 f は単射である。□

一方、例 12 の f の定義域を実数全体 \mathbb{R} に拡大して得られる写像

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$$

は単射ではない。実際、 $1 \neq -1$ だが $g(1) = 1 = g(-1)$ である。

全射性と単射性についての一般論における例を一つ示して終わろう。演習問題に類題を用意したので、そちらにも取り組んで欲しい。

例 13. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする. また, g は単射であり, $g \circ f$ が全射であるとする. このとき, f は全射である.

証明. g が単射であることと, $g \circ f$ が全射であることを仮定する.

f が全射であることを示すため, $y \in Y$ とする. $z := g(y) \in Z$ とおく. $g \circ f$ は全射なので, ある $x \in X$ が存在して $g \circ f(x) = z$ となる. このとき,

$$g(f(x)) = g \circ f(x) = z = g(y)$$

より $g(f(x)) = g(y)$ となる. いま, g は単射であるから, $f(x) = y$ となる. 以上より, f が全射であることが示された. □

第六回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) $f: X \rightarrow Y$ を写像, $A \subset X$ とする. また, $a \in X$ とする. 次の主張は正しいか?
「 $f(a) \in f(A)$ ならば $a \in A$ である.」
- (2) $f: X \rightarrow Y$ を写像, $B \subset Y$ とする. このとき, X の元 x に対する条件「 $x \in f^{-1}(B)$ 」と同値な条件を全て選べ.
(i) $f(x) \in B$ (ii) $f(x) = B$ (iii) $f(x) \subset B$ (iv) $\{f(x)\} \subset B$
- (3) 例 5 中にある証明において, 条件 $x \in f^{-1}([1, 4])$ と $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ がいくつかの “ \Leftrightarrow ” で結ばれている. 一つ一つの \Leftrightarrow が何故成り立つのか, 説明せよ.
- (4) 例 6 の設定で, $D^2 = f^{-1}([0, 1])$ となることを確認せよ.
- (5) 例 13 の証明において, 「 g は単射である」や「 $g \circ f$ は全射である」の仮定はそれぞれどこで使われているか?
- (6) 例 13 の証明の中の式変形

$$g(f(x)) = g \circ f(x) = z = g(y)$$

の中の一つ一つの “=” が何故成り立つのか, 説明せよ.

問題 1. ここでは, 複素数の絶対値と偏角を写像として考える (第五回講義の例 5 参照).

- (1) 複素数 z の絶対値 $|z|$ を対応させる写像を考える:

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|$$

- (a) 円 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = 1\}$ の像 $\Phi(C)$ を求めよ.
- (b) 逆像 $\Phi^{-1}([1, 2])$ を図示せよ.
- (2) 0 でない複素数 z の偏角 $\arg z$ (ただし $0 \leq \arg z < 2\pi$) を対応させる写像を考える:

$$\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \arg z$$

- (a) 円 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = 1\}$ の像 $\arg(C)$ を求めよ.
- (b) 逆像 $\arg^{-1}([0, \frac{\pi}{2}])$ を図示せよ.

問題 2. 写像

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

を考える.

- (1) $f([\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi])$ を図示せよ.
 (2) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{2}\}$ とおく.
 (a) R を図示せよ.
 (b) $f^{-1}(R)$ を求めよ.

問題 3.

$$X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

とおく. また, 写像

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| - 1$$

を考える. 以下のそれぞれの集合を, 外延的記法 (元を全て列挙する方法) で表せ.

- (1) X
 (2) $f(X)$
 (3) $f^{-1}([0, 1])$

問題 4 (定理 3, 定理 7 の証明の残り).

- (1) $f: X \longrightarrow Y$ を写像, $A_1, A_2 \subset X$ とする. 次が成り立つことを示せ.
 (a) $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
 (b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
 (2) $f: X \longrightarrow Y$ を写像, $B_1, B_2 \subset Y$ とする. 次が成り立つことを示せ.
 (a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
 (b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

問題 5. 次のそれぞれの場合において, 条件をみたす例を挙げよ.

- (1) 写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $A_1, A_2 \subset X$ であって,

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$$

をみたすもの. (参考: 定理 3 (3))

- (2) 写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $B \subset Y$ であって

$$f(f^{-1}(B)) \neq B$$

をみたすもの. (参考: 定理 8 (1))

- (3) 写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $A \subset X$ であって

$$A \neq f^{-1}(f(A))$$

をみたすもの. (参考: 定理 8 (2))

(ヒント: 全ての場合において, $f(x) = x^2$ という式で例が作れる. あとは X, Y, A, B など
をうまく設定せよ.)

問題 6. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

(1) $A \subset X$ に対して, 次の等式を示せ.

$$g \circ f(A) = g(f(A))$$

(2) $B \subset Z$ に対して, 次の等式を示せ.

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$$

問題 7. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

- (1) f と g が全射ならば, $g \circ f$ も全射であることを示せ.
- (2) f と g がともに単射ならば, $g \circ f$ も単射であることを示せ.
- (3) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射であることを示せ.
- (4) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射であることを示せ.

(何をやるべきか, ということについては例 13 の証明を参考にせよ.)

問題 8. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) f が全射のとき, 任意の $B \subset Y$ に対して $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つことを示せ.
- (2) f は単射のとき, 任意の $A \subset X$ に対して $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つことを示せ.

(ヒント: 定理 8 により, 示すべきことは半分終わっている. 残りは何をやるべきか?)

第七回講義ノート

今回学ぶこと

- 逆写像, 全単射の定義.
- 「逆写像の存在」と「全単射であること」は同値である.
- 集合の対等性. 濃度が等しいこと.
- 可算集合と非可算集合.

§ 逆写像, 全単射.

逆関数の概念を思い出そう. 例えば, 指数関数と対数関数は互いに逆関数の関係にあった. より具体的には,

$$e^{\log x} = x, \quad \log e^x = x \quad (\text{あ})$$

という式が成り立っていた.

(あ) を詳しく見ていく. まず, 定義域と値域をはっきりさせる. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $e^x > 0$ であるから, 指数関数の値域は正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_{>0}$ にとれる. また, 真数条件により, 対数関数の定義域は $\mathbb{R}_{>0}$ にとる. すると, 指数関数・対数関数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, & x &\mapsto e^x \\ \log: \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \log x \end{aligned}$$

という写像として定義される. 二つの写像 \exp と \log の定義域と値域が, お互いのものに入れ替わっていることに注目しよう. そこで, 二種類の合成写像

$$\begin{aligned} \exp \circ \log: \mathbb{R}_{>0} &\xrightarrow{\log} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_{>0}, \\ \log \circ \exp: \mathbb{R} &\xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log} \mathbb{R} \end{aligned}$$

を考えることができる. 任意の $x \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$\exp \circ \log(x) = \exp(\log(x)) = e^{\log x}$$

が成り立つ. 一方, $\mathbb{R}_{>0}$ の恒等写像 $\text{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$ を用いると (第五回講義の例 8 を参照), 任意の $x \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, “当たり前の式”

$$x = \text{id}_{\mathbb{R}_{>0}}(x)$$

が成り立つ. よって, (あ) の最初の式 $e^{\log x} = x$ は写像としての等式

$$\exp \circ \log = \text{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$$

として理解できる. 同様に, 写像としての等式

$$\log \circ \exp = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ.

これを踏まえて, 逆写像の概念を導入しよう.

定義 1. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

写像 $g: Y \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき, g は f の **逆写像** であるという:

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{かつ} \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

注. $g \circ f = \text{id}_X$ は写像としての等式である. 両辺がともに X から X への写像になっていることを確認しよう. $f \circ g = \text{id}_Y$ の方も同様の確認を行おう.

注. 定義からすぐに分かること: g が f の逆写像であれば, f は g の逆写像である.

ここで, 一見すると話が飛ぶようだが, 次の定義を行う.

定義 2.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射でありかつ単射であるとき, f は **全単射** であるという.

全射と単射の定義については第六回講義ノートを復習しよう. 次は基本的な定理である.

定理 3. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) f に逆写像が存在するならば, f は全単射である.
- (2) f の逆写像は存在すれば一意である.

証明. (1) f の逆写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在することを仮定する. $f \circ g = \text{id}_Y$ および $g \circ f = \text{id}_X$ が成り立つ.

このとき, f は全射である. 実際, $y \in Y$ とする. $x := g(y)$ とおくと, $x \in X$ であり,

$$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y$$

より $f(x) = y$ が成り立つ. 以上より, f が全射であることが示された.

また, f は単射である. 実際, $x_1, x_2 \in X$ とし, $f(x_1) = f(x_2)$ が成り立つと仮定する. このとき,

$$x_1 = \text{id}_X(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2) = \text{id}_X(x_2) = x_2$$

より, $x_1 = x_2$ となる. 以上より, f が単射であることが示された.

f は全射であり単射でもあるので, f は全単射である.

(2) 写像 $g_1: Y \rightarrow X$ と $g_2: Y \rightarrow X$ がともに f の逆写像であると仮定する. このとき, 写像として $g_1 = g_2$ であることを示せばよい.

$y \in Y$ とする. (1) で行ったのと同様の計算により,

$$f(g_1(y)) = y = f(g_2(y))$$

が成り立つ. いま, f に逆写像が存在するから, (1) で示したことから f は単射である. よって, $g_1(y) = g_2(y)$ となる. 以上より, $g_1 = g_2$ であることが示された. \square

f の逆写像はいつも存在するとは限らないが, 存在すれば唯一つである. (定理 3 (2) による.) そこで, f に逆写像が存在するときは, それを f^{-1} という記号であらわす.

例 4. 今回の講義の最初に見たように, 写像 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ には逆写像が存在し, それは対数関数 $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ である. よって,

$$\exp^{-1} = \log$$

となる.

注 . (1) 逆写像の記号と逆像の記号は大変紛らわしいので注意すること! 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

- f の逆写像はいつも存在するとは限らない. もしあるとするならば, それは $f^{-1}: Y \rightarrow X$ という写像として定まる.
- Y の部分集合 B に対して, 逆像 $f^{-1}(B)$ は X の部分集合として定まる. 逆像はいつも定まる.

(2) f が逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ を持つとし, $B \subset Y$ とする. このとき, 記号 $f^{-1}(B)$ には二通りの解釈があるが, どちらを用いても得られる X の部分集合は同じである. すなわち,

$$\text{「}f \text{ による } B \text{ の逆像」} = f^{-1}(B) = \text{「}f^{-1} \text{ による } B \text{ の像」}$$

(3) 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $y \in Y$ に対して, 逆像 $f^{-1}(\{y\})$ のことを $f^{-1}(y)$ とかく習慣がある. $f^{-1}(y)$ という記号を見ると, まるで逆写像 f^{-1} が存在しているかの様だが, そうとは限らないので注意する. 特に, この習慣の下では, $f^{-1}(y)$ は X の部分集合である. (これは本当に紛らわしい!)

実は、定理 3 (1) の逆も成立する。一つの定理の形にまとめておこう。

定理 5. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。次が成り立つ。

$$f \text{ に逆写像が存在する} \iff f \text{ は全単射である}$$

略証. 「 \Rightarrow 」については定理 3 (1) で示している。

「 \Leftarrow 」については、発見的な説明をして証明のヒントとしよう。(だから“略証”です。)

写像 $f: X \rightarrow Y$ があったとする。 f がいつ逆写像を持つのかを考えてみよう。もし、 $g: Y \rightarrow X$ が f の逆写像であるとする、

$$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x, \tag{あ}$$

$$\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y \tag{い}$$

の二つの条件が成り立つ。この内、条件 (い) は、 $g(y)$ が

$$g(y) = \text{「} f \text{ でうつすと } y \text{ になる様な } X \text{ の元」} \tag{う}$$

という条件をみたすことを意味している。

そこで、(う) を写像 g の定義式にしてしまいたい。そうすれば、自動的に条件 (い) が成り立つことになる。

(う) で定められた対応 g が写像になるためには、どんな $y \in Y$ に対しても $f(x) = y$ となる様な $x \in X$ が存在していて欲しい。これは、 f が全射であるという条件である。

また、「 f でうつすと y になる様な X の元」は二つ以上あってもいけない。つまり、 $y \in Y$ をとるとき、相異なる $x_1, x_2 \in X$ であって $f(x_1) = f(x_2) = y$ となるものがあると困る。 $g(y) = x_1$ としたら良いか、 $g(y) = x_2$ としたら良いのか、決めかねるからである。要するに、「 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 」が成り立っていて欲しい。これは、 f が単射であるという条件である。

以上より、 f が全単射であれば、(い) をみたす様な写像 $g: Y \rightarrow X$ が定義できることが分かる。あとは、この g が条件 (あ) をみたすことの確認が残っているのだが、それは演習問題としよう。 \square

§ 集合の対等性.

前節で説明した様に、全単射 $f: X \rightarrow Y$ があると、 f の逆写像 f^{-1} が存在する。二つの写像があるさまを

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & f^{-1} & \end{array}$$

の様にかいておこう.

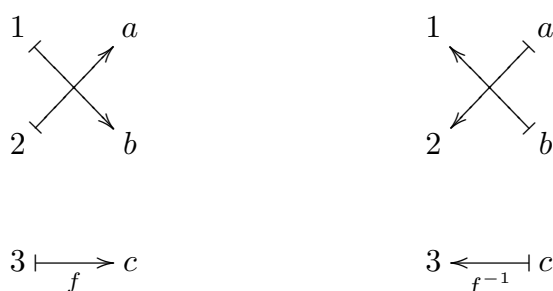
一般的な定義の前に, 第五回講義の例 6 の写像

$$f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c\}, \quad f(1) = b, \quad f(2) = a, \quad f(3) = c$$

を思い出そう. これは, 全単射である (確認せよ!) また, f の逆写像は

$$f^{-1}: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}, \quad f^{-1}(a) = 2, \quad f^{-1}(b) = 1, \quad f^{-1}(c) = 3$$

となる. f と f^{-1} による元の対応は下図の様になる.



矢印 \mapsto によって集合 $\{1, 2, 3\}$ の元たちと集合 $\{a, b, c\}$ の元たちが結びつき, しかもその対応には全くもれがない. 写像 f によって, $\{1, 2, 3\}$ の元たちと $\{a, b, c\}$ の元たちの間の一対一対応が得られる. 特に, $\{1, 2, 3\}$ と $\{a, b, c\}$ の元の個数は等しい. (どちらも 3 個.)

定義 6. X と Y を集合とする.

全単射 $f: X \longrightarrow Y$ が存在するとき, X と Y は**対等**である, または, **等しい濃度を持つ**という.

集合 X と Y が対等であることは, それらの間の全単射を通じて, X の元と Y の元の間の一対一の対応ができることを意味している. 少し踏み込んで述べると, 集合として見る限り, X と Y は同一視することが可能ということである.

例 7. 第五回講義で述べた, 複素数全体のなす集合 \mathbb{C} と平面 \mathbb{R}^2 の“同一視”

$$\begin{aligned} \mathbb{C} & \text{ “=” } \mathbb{R}^2 \\ x + iy & \leftrightarrow (x, y) \end{aligned}$$

を再考しよう. 今回の講義での用語を用いると, この同一視には, 全単射

$$\Phi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = x + iy \mapsto (x, y) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

が使われていることになる. (写像の名前は便宜上つけた. 記号は何でも良い.)

上にも挙げた例 6 では、集合 $\{1, 2, 3\}$ と $\{a, b, c\}$ は対等である。一般に、集合 A が **有限集合** であるとは、ある自然数 n が存在して A が $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ と対等になることをいう。このとき、 n のことを A の **位数** といい、 $|A|$ とかく。要するに、 $|A|$ は集合 A の元の個数である。例えば $\{a, b, c\}$ は有限集合であり、 $|\{a, b, c\}| = 3$ である。

二つの有限集合のサイズを比べるには、両者の元の個数を比べれば良い。元の個数が等しければ、二つの有限集合は対等になる。また、例えば有限集合 A, B について、 $A \subset B$ であれば $|A| \leq |B|$ が成り立つ。さらに、 $A \subsetneq B$ であれば $|A| < |B|$ が成り立つ。($A \subsetneq B$ は「 A は B の真部分集合である」を意味する。第二回講義参照。) このことはベン図をかいてみれば「当たり前じゃん」となると思う。素朴な直観が効く。

有限集合ではない集合を **無限集合** という。第二回講義の例 1 に挙げた集合

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

は全て無限集合である。他にも実に様々な無限集合がある。無限集合の元の個数を数えることは安直にはできないから、二つの無限集合 X と Y が“同じ元の個数を持つ”ことは、 X と Y が対等であるということとして定式化する。すぐ後で見ると、無限集合のサイズにも色々あり、対等でない二つの無限集合が存在する。

無限集合どうしを比べるとき、有限集合を考えるとときに働いた素朴な直観が裏切られることがある。要注意である。例えば、 $X \subsetneq Y$ だからといって、「 X の元の個数」が「 Y の元の個数」より少ないとは限らない。

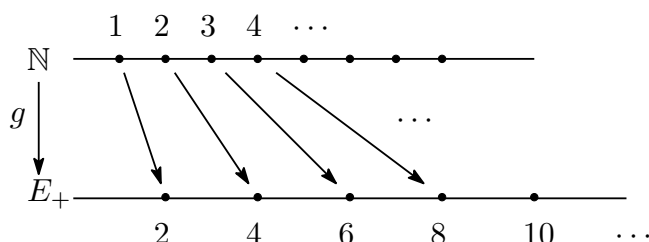
- 例 8.** (1) 指数関数 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は全単射である。よって、 \mathbb{R} と $\mathbb{R}_{>0}$ は対等である。
 (2) 自然数のうち、偶数全体の集合を E_+ とする:

$$E_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \quad n = 2m\}.$$

(集合の表し方については、第四回講義の例 7 も参照。) このとき、写像

$$g: \mathbb{N} \rightarrow E_+, \quad m \mapsto 2m$$

は全単射である。よって、 \mathbb{N} と E_+ は対等である。写像 g の様子を図示してみると、次の様になる。 E_+ は \mathbb{N} の“半分くらい”しかなさそうに見えるが、実は写像 g によって一対一の対応が作れるのである。



最も簡単なクラスの無限集合について説明する. 自然数全体の集合 \mathbb{N} と対等な集合を 可算 である, あるいは 可算集合 という. (可算無限集合ということもある.) 集合 A に対して全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ があれば,

$$A = \{f(1), f(2), f(3), f(4), \dots\}$$

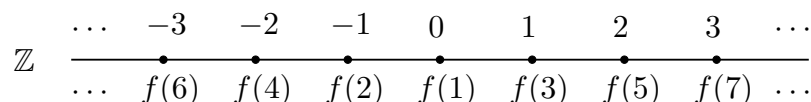
とかける. ここで, $f(1), f(2), f(3), \dots$ たちは全て相異なり, 重複はない. そこで, 集合 A が可算であるとは, A の元を a_1, a_2, a_3, \dots , と番号を付けて全て並べられるということに他ならない.

可算集合の例をいくつか挙げる. 番号のつけ方を鑑賞しておこう.

例 9. (1) 整数全体の集合 \mathbb{Z} は可算である. 実際, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ を

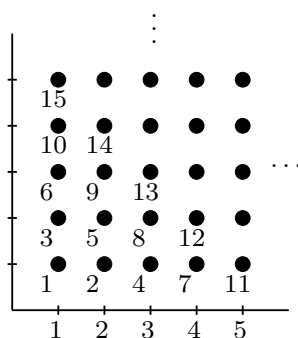
$$f(n) := \begin{cases} \frac{n-1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ -\frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と定めると, f は全単射である. よって \mathbb{Z} は \mathbb{N} と対等である.



上図は, f によって \mathbb{Z} の元たちが番号付けされていく様子を示している.

(2) 直積集合 $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算である. 実際, \mathbb{N}^2 は平面 \mathbb{R}^2 の第一象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$ なる領域) の格子点 (x 座標と y 座標が共に整数である点) の全体と同一視される. そこで, 次の様に番号を付ければよい:

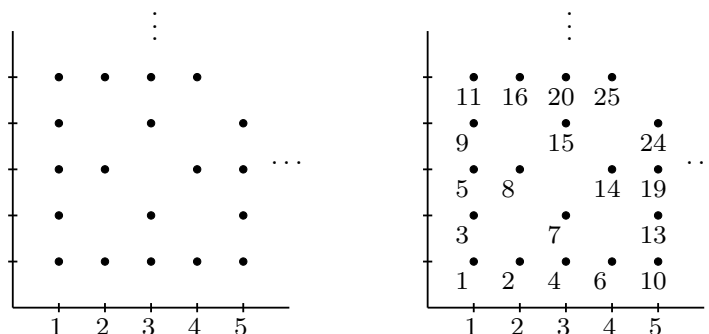


(3) 有理数全体の集合 \mathbb{Q} は可算である.

これを示すために, まず正の有理数全体の集合 $\mathbb{Q}_{>0}$ を考える. $\mathbb{Q}_{>0}$ の元は既約分数 $\frac{q}{p}$ ($p, q \in \mathbb{N}$ で p と q は互いに素) の形をしている. そこで, 既約分数 $\frac{q}{p}$ に格子点 (p, q) を対応させることで, $\mathbb{Q}_{>0}$ と

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ と } y \text{ は互いに素}\}$$

は同一視される (正確には, 対等である). Y の元は図の様に番号を付けられる:



この方法で $\mathbb{Q}_{>0}$ の元を並べると,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots,$$

となる. よって Y は可算集合であり, $\mathbb{Q}_{>0}$ もそうである. 同様に, 負の有理数全体 $\mathbb{Q}_{<0}$ も可算集合である.

いま, $\mathbb{Q} = \{0\} \cup \mathbb{Q}_{<0} \cup \mathbb{Q}_{>0}$ と分けておき,

$$\mathbb{Q}_{>0} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad \mathbb{Q}_{<0} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

と番号付けをしておく. このとき, \mathbb{Q} の元を

$$0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots,$$

と番号付けすることができる. よって \mathbb{Q} は可算集合である.

カントールは可算ではない集合がある, ということを示した.

定理 10. 実数全体の集合 \mathbb{R} は可算集合ではない. すなわち, \mathbb{R} と \mathbb{N} は対等ではない.

証明. まず, \mathbb{R} と $(0, 1)$ は対等である. 実際, 写像 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ は全単射である. そこで, $(0, 1)$ が可算集合ではないことを示せばよい.

背理法でこれを示す. 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ があったとする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f(n)$ を十進展開する:

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\dots$$

ここで, $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ であり, 0 が無限に続かない様に, $0.2 = 0.200\dots = 0.1999999\dots$ の様にあらわす. (この条件を課すことで, 十進展開が一意的に決まる.)

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$b_k = \begin{cases} 1 & (a_{kk} \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (a_{kk} \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおく. さらに,

$$x := 0.b_1b_2b_3b_4b_5\cdots$$

とおく. $x \in (0, 1)$ である. しかし, どの $n \in \mathbb{N}$ に対しても, x と $f(n)$ は小数第 n 位が異なるので $x \neq f(n)$. これは $f(\mathbb{N}) = (0, 1)$ に矛盾する. \square

注. いまの証明で用いた論法をカントールの**対角線論法**という. この証明では, 各自然数 n に対して $f(n)$ の十進展開を考えた:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\ f(4) &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

そして, 右側の対角線に並ぶ数字

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$$

に着目して, x を定めたのである.

注. 例 9 (3) と \mathbb{Q} は可算であり, 定理 10 より \mathbb{R} は可算ではない. よって, \mathbb{R} と \mathbb{Q} も対等ではない. (演習問題 4 も参照.) 「 \mathbb{Q} の点の個数」よりも「 \mathbb{R} の点の個数」の方がずっと多いのである. 図形的には, \mathbb{R} は数直線であり, \mathbb{Q} は座標が有理数である様な数直線上の点 (有理点) 全体の集合である.

最後に, 証明なしで次の結果だけ述べておく.

例 11. \mathbb{R}^2 と \mathbb{R} は対等である.

図形的には, \mathbb{R} は数直線であり \mathbb{R}^2 は平面である. 平面からみれば直線など薄っぺらいから, 「 \mathbb{R} の元の個数」よりも「 \mathbb{R}^2 の元の個数」の方がずっと多いと思うのが人の直観ではないだろうか. ところが, 実際には \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 の間には全単射が構成できるのである. 集合としては \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 は同一視できる. なんとも不思議なことである. (実は, 定理 10 の証明で用いた実数の十進展開を用いて全単射が作れる.) 一方, 例 9 では \mathbb{N} と \mathbb{N}^2 が対等であることをみているから, 「まあそんなこともあるか」と感じる人もいるかもしれない.

なお, 図形として見ると \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 は同じではない, ということが位相空間論を学ぶと分かるだろう.

第七回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

(1) 定理 3 (1) の証明の中で,

$$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y$$

という計算をしている. 一つ一つの「=」がなぜ成り立つのか, 説明せよ.

(2) 定理 3 (1) の証明の中で,

$$x_1 = \text{id}_X(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2) = \text{id}_X(x_2) = x_2$$

という計算をしている. 一つ一つの「=」がなぜ成り立つのか, 説明せよ.

(3) 定理 3 (2) の証明の中で,

$$f(g_1(y)) = y = f(g_2(y))$$

が成り立つ, と述べている. このことを詳しく説明せよ.

(4) 自然数のうち, 奇数全体の集合を O_+ とする:

$$O_+ = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \quad n = 2m - 1\}.$$

例 8 (2) を参考にして, \mathbb{N} は O_+ と対等であることを示せ.

(5) 例 9 (3) の方法で $\mathbb{Q}_{>0}$ の元に番号を付けるとき, 30 番目の元は何か.

(6) 定理 10 の証明の中で, 写像

$$f: (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

を考えた. $y = f(x)$ のグラフをかけ.

問題 1. \mathbb{R}^2 の単位円から点 $N = (0, 1)$ を除いた集合を X とする:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{N\}$$

写像 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ を次のステップ (i)(ii) により定める:

(i) $P \in X$ に対し, P と N を通る直線を l とする.

(ii) l と x 軸の交点の x 座標を $\varphi(P)$ とする.

(1) X を図示せよ.

- (2) $P = (a, b)$ とするとき, $\varphi(P)$ を a, b を用いてあらわせ.
 (3) 写像 φ は全単射である. 逆写像 $\psi: \mathbb{R} \rightarrow X$ を求め, 式であらわせ.

問題 2. 例 9 (2) の方法で $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元に番号を付けるとする. 例えば, $(3, 1)$ は 4 番目, $(4, 2)$ は 12 番目である. このとき, $(5, 5)$ は何番目になるか. 1000 番目の元は何か.

問題 3. a, b, c, d を $a < b$ かつ $c < d$ をみたす実数とする. 閉区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ は対等であることを示せ. つまり, $[a, b]$ と $[c, d]$ の間に全単射を構成せよ.

問題 4. X, Y, Z を集合とする. 以下を示せ.

- (1) X と X は対等である.
 (2) X と Y が対等ならば, Y と X は対等である.
 (3) X と Y が対等でありかつ Y と Z が対等ならば, X と Z は対等である.

問題 5. 講義ノートの冒頭で述べた様に, 指数関数と対数関数は互いの逆関数である. ところで, $y = e^x$ のグラフと $y = \log x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して線対称であることを高校で習ったと思う. このことを一般化しておこう.

$f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ は互いの逆写像であるとする. $\Gamma_f \subset X \times Y$ と $\Gamma_g \subset Y \times X$ をそれぞれ f と g のグラフとする. (第五回講義の定義 14 を参照.) このとき, 任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して次が成り立つことを示せ.

$$(x, y) \in \Gamma_f \iff (y, x) \in \Gamma_g$$

第八回講義ノート

今回学ぶこと

- 集合族
- 選択公理
- 同値関係と商集合

まず、集合族 (添え字付き集合) という概念を説明する。これは、集合が二つや三つだけでなく、もっとたくさんある (ときには無限個) という状況に現れる。集合族に対してその和集合や共通部分を考えることができ、それは集合 A, B に対する和集合 $A \cup B$ や共通部分 $A \cap B$ の一般化になっている。

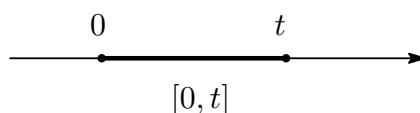
集合族の説明の後には、いくつか補足的な内容を説明する。この内、同値関係と商集合の概念が、数学のどの分野にも現れると言っても過言ではない程に非常に大切である。ここでは少ない例しか取り扱えないが、数学科での学習が進むにつれてより多くの具体例を学ぶことと思う。

§ 集合族.

例えば、 t を 0 より大きい実数として、閉区間 $[0, t]$ を考えよう。あえて、

$$I_t := [0, t]$$

とかくことにする。 (I は区間の英訳 “interval” から採った。) 下図を参照。



例えば、 $I_2 = [0, 2]$, $I_{100} = [0, 100]$ となる。 t が変わると、区間 I_t の形は変化する。 t が大きくなると I_t は伸びて、 t が小さくなると I_t は縮む、という様子を思い浮かべて欲しい。

この様に、あるパラメータ (この場合は 0 より大きい実数 t) を決めるごとにある集合 (この場合は集合 I_t) が決まる、というものを集合族という。パラメータは、 I_t の t の様に小さくかく習慣があるので、添え字とも呼ばれる。集合族のちゃんとした定義を述べよう。

定義 1. X を普遍集合, Λ を集合とする。

Λ の各元 λ に対して集合 $A_\lambda \subset X$ が与えられているとき、これを Λ に添え字づけられた (X の部分) **集合族** といい、 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ とかく。 Λ のことを **添え字の集合** と呼ぶ。 X が明らかなきは、これを省略する。

例 2. 上の $I_t = [0, t]$ の例では, 添え字 t は 0 より大きい実数全体を動くから, $\Lambda = \mathbb{R}_{>0} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ となり, 集合族は

$$(I_t)_{t \in \mathbb{R}_{>0}}$$

とかける. また, 普遍集合 X については $X = \mathbb{R}$ と考えればよい.

例 3. 自然数 n に対して, n の約数全体の集合を Y_n とする. (約数だから「 Y 」を使ってみた.) 例えば, 6 の約数は 1, 2, 3, 6 だから $Y_3 = \{1, 2, 3, 6\}$ である. そこで, 集合族

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

が考えられる. 添え字の集合は \mathbb{N} である.

例 4. 第三回講義では, n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n を考えるという状況があった. これも集合族と考えられる. 実際, 添え字の集合を $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ とすれば, 集合族

$$(A_i)_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$$

を考えていることになる.

ここで, 例 2 と例 3 では, 添え字の集合が無限集合となっていることに注意しよう.

注 . X のべき集合を $\mathcal{P}(X)$ とかいていた (第四回講義の例 9 参照.) $A_\lambda \subset X$ は $A_\lambda \in \mathcal{P}(X)$ と同値である. そこで, X の部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ があると, 写像

$$\Lambda \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad \lambda \mapsto A_\lambda$$

が定まる. 逆に, 集合 Λ から $\mathcal{P}(X)$ への写像は Λ を添え字とする X の部分集合族を定める.

第三回講義において, n 個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の共通部分や和集合を定義した. これを一般化して, 集合族の共通部分や和集合を定義しよう.

定義 5. $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 Λ に添え字づけられた集合族とする.

- $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の 共通部分 を次で定める:

$$\begin{aligned} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &:= \{x \mid \text{全ての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda \quad x \in A_\lambda\} \end{aligned}$$

- $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の 和集合 を次で定める:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &:= \{x \mid \text{少なくとも一つの } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda \quad x \in A_\lambda\} \end{aligned}$$

注 . ある集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合や共通部分を求める際の議論の一例を説明する.

共通部分について: $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の正体は集合 X であると (勘でも何でも良いので) 分かったとする. そこで, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X$ であることを証明したい. このとき, やるべきことは以下のとおりである.

- x が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in A_\lambda$ をみたすと仮定する. そして, $x \in X$ となることを示す. これができれば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset X$ が証明できたことになる.
- $x \in X$ を仮定する. そして, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in A_\lambda$ が成り立つことを示す. これができれば, $X \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が証明できたことになる.

和集合について: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の正体は集合 Y であると分かったとする. そこで, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = Y$ であることを証明したい. このとき, やるべきことは以下のとおりである.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset Y$ となることを示す. これができれば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset Y$ が証明できたことになる.
- $y \in Y$ を仮定する. そして, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $y \in A_\lambda$ となることを示す. これができれば, $Y \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が証明できたことになる.

次の例 6 では, 上の手順に沿って証明をかいたので, 確認しながら読んで欲しい.

例 6. 例 2 の集合族 $(I_t)_{t \in \mathbb{R}_{>0}}$ (ただし $I_t = [0, t]$) を考える. このとき,

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t = \{0\}, \quad \bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

となる.

証明. $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t = \{0\}$ の証明: $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t \subset \{0\}$ と $\{0\} \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ を示せば良い.

$x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ とする. $x \in I_1 = [0, 1]$ が成り立つから, 特に, x は 0 以上の実数である.

もし $x > 0$ であるとする, $x \notin I_{\frac{x}{2}}$ となるので, これは $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ に矛盾する. よって

$x = 0$ となる. 以上で $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t \subset \{0\}$ が示された.

次に, 任意の実数 $t > 0$ に対して, $0 \in I_t$ が成り立つので, $0 \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ が成り立つ. よって,

$\{0\} \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ となる.

$\bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t = \mathbb{R}_{\geq 0}$ の証明: $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ を示せば良い.

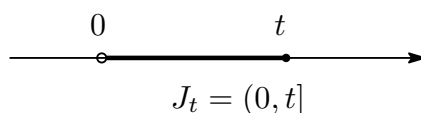
任意の実数 $t > 0$ に対して $I_t \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ が成り立つので, $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ が成り立つ.

$x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とすると, $x + 1$ は 0 より大きい実数であり, $0 \leq x \leq x + 1$ より $x \in I_{x+1}$ が成り立つ. よって $x \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ となる. 以上で $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}_{>0}} I_t$ が成り立つ. \square

例 7. 例 6 を少し変えてみる. 正の実数 t に対して半開区間 $(0, t]$ を J_t とかく:

$$J_t := (0, t] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq t\}$$

J_t を図示すると次の様になる.



このとき,

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} J_t = \emptyset$$

が成り立つ. つまり, 集合族 $(J_t)_{t \in \mathbb{R}_{>0}}$ の共通部分は空集合となる.

このことをどう証明すれば良いだろうか. ある集合が空集合であることを示す一つの方法として, 「その集合が元を持つと仮定して, 矛盾を導く」というやり方がある. それを使ってみよう.

$\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} J_t = \emptyset$ の証明: $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} J_t$ となる x が存在したと仮定する. $x \in J_1 = (0, 1]$ が成り立つから, 特に, x は正の実数である. $\frac{x}{2}$ も正の実数なので, $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} J_t$ より $x \in J_{\frac{x}{2}}$ でなければならない. これは, $x \leq \frac{x}{2}$ を意味する. すると $x \leq 0$ となり, x が正の実数であることに矛盾する. よって $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} J_t = \emptyset$ が示された. \square

第六回講義の定理 3 と定理 7 は像や逆像をとる操作と和集合や共通部分をとる操作についての公式であった. これらの公式は集合族に対しても自然に一般化される.

定理 8. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

(1) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合族とする. このとき, 次が成り立つ.

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \quad f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

(2) $(B_\mu)_{\mu \in M}$ を Y の部分集合族とする. このとき, 次が成り立つ.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$$

この定理の証明は演習問題とする.

注. 定理 8 に現れる記号の意味について補足する. (1) の最初の等式

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

の左辺は, 和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の f による像である. 右辺においては, まず, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(A_\lambda)$ を対応させることにより, Y の部分集合族 $(f(A_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を考えている. これの和集合をとったものが右辺である.

§ 一般の直積と選択公理.

定義 9. $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を (ある普遍集合 X の部分) 集合族とする. 次の条件をみたす写像 $a: \Lambda \rightarrow X, \lambda \mapsto a_\lambda$ を $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の **選択関数** という:

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $a_\lambda \in A_\lambda$

要するに, 選択関数とは, 各 λ に対して A_λ の元を一個ずつ選んでくる, というものである. $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数全体の集合を集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の **直積** といい, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とかく.

例 10. $\Lambda = \{1, 2\}$ のとき. 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は A_1 と A_2 からなる. この集合族の選択関数の一つを決めることは, A_1 から元を一つ選び, A_2 から元を一つ選ぶことと同じである. 従って, 直積 $\prod_{\lambda \in \{1, 2\}} A_\lambda$ は第二回講義の定義 8 の意味での直積集合 $A_1 \times A_2$ に等しい.

ある自然数 n に対して $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ となっているときも, 同様の議論で直積 $\prod_{\lambda \in \{1, 2, \dots, n\}} A_\lambda$ は第二回講義の意味での直積集合 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ に等しい. (各 A_λ から元を一つ選ぶことが有限回のステップで済む, ということがポイントである.)

Λ が無限集合のときも同様に考えたいのだが, 実はそうはいかない. ZFC の公理系では, これがいつでもできるということを公理として要請する:

選択公理 (axiom of choice). 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ をみたすとする. このとき, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数が存在する. 特に, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は空集合ではない.

20 世紀の初め頃, ツェルメロによって, この命題が自明ではないことが認識された. 選択公理を認めると様々な命題の証明が可能になる一方で, 人の直観に反する様な不思議な命題も証明できてしまう. 有名なものとして, 例えば **バナッハ・タルスキーの定理** が挙げられる. (この定理によれば, 直径 1 の球体を適当な個数のパーツに分け, 各パーツをうまく回転, 平行移動してから組み合わせると, 直径 2 の球体を作ることができる!)

選択公理の使用例を一つ挙げる.

定理 11. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. f が全射であることと, $f \circ s = \text{id}_Y$ となる写像 $s: Y \rightarrow X$ が存在することは同値である.

証明. f が全射であるとする. 任意の $y \in Y$ に対し, $X_y := f^{-1}(\{y\})$ は空集合ではない. 選択公理より, 集合族 $(X_y)_{y \in Y}$ の選択関数 s が存在する. 任意の $y \in Y$ に対して $s_y \in X_y$ であるから, $f(s_y) = y$ となる. よって $f \circ s = \text{id}_Y$.

一方, $f \circ s = \text{id}_Y$ となる写像 $s: Y \rightarrow X$ が存在するとする. $y \in Y$ とする. $x := s(y)$ とおくと $f(x) = f(s(y)) = \text{id}_Y(y) = y$ である. よって f は全射である. □

定理 11 に双対的な主張も述べておく. なお, こちらの証明には選択公理を使わない.

定理 12. $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, X は空集合ではないとする. このとき, f が単射であることと, $p \circ f = \text{id}_X$ となる写像 $p: Y \rightarrow X$ が存在することは同値である.

証明. $f: X \rightarrow Y$ は単射であるとする. X は空集合ではないから, ある x_0 が存在して $x_0 \in X$ となる. この様な x_0 を固定する. 写像 $p: Y \rightarrow X$ を次の様に定める

$$p(y) = \begin{cases} x, & \text{ただし, } x \text{ は } f(x) = y \text{ となる } x \in X \quad (y \in f(X) \text{ のとき}) \\ x_0, & \quad (y \in Y \setminus f(X) \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで, $y \in f(X)$ のとき, $f(x) = y$ となる $x \in X$ は確かに存在し, また, その様な x は唯一つであることに注意する. f は単射だからである. そこで, p は写像として確かに定義されている. このとき, 任意の $x \in X$ に対して $p \circ f(x) = x$ となる (チェック!).

次に, $p \circ f = \text{id}_X$ となる p が存在したとする. $x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ をみたすとする. すると,

$$x_1 = p \circ f(x_1) = p(f(x_1)) = p(f(x_2)) = p \circ f(x_2) = x_2$$

となる (それぞれの等号が成り立つ理由をチェック!) よって f は単射である. □

§ 二項関係.

定義 13. 集合 X 上の二項関係 \sim とは, X の任意の元 x と y に対して, $x \sim y$ であるか, そうではないかがはっきりと定まっているものである.

例 14. (1) 整数全体の集合 \mathbb{Z} において, 大小関係 \leq は二項関係である.

(2) \mathbb{Z} において, $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 「 $a = b + 1$ が成り立つ」と定めると, これは二項関係である. ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ は左辺の記号を右辺の意味で定義する, という意味である.)

\sim が X 上の二項関係であるとき,

$$R_\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

とおくと,

$$(x, y) \in R_\sim \Leftrightarrow x \sim y$$

が成り立つ. 逆に, $X \times X$ の部分集合 R が与えられたとすると, X 上の二項関係 \sim_R を

$$x \sim_R y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x, y) \in R$$

によって定義することができる. よって, 形式的には, X 上の二項関係とは $X \times X$ の部分集合を与えることに他ならない.

そこで, X 上の二項関係というのはたくさん ($\mathcal{P}(X \times X)$ のぶんだけ) ある.

§ 同値関係と商集合.

等号 $=$ の意味について再考しよう. $A = B$ とかいたとき, その意味は両辺にある A と B が “等しい” ということである. ところで, A や B の場所にくるものとしては, 様々なものがあり得る. 二つの実数が等しい, 二つの複素数が等しい, 二つのベクトルが等しい, 二つの集合が等しい, 二つの関数が等しい, などなど.

二つの対象が等しいためには, それらが同じクラスに属していなければならない. (例えば \mathbb{N} とその元 1 は比べ様がない.) それを踏まえた上で, 日常で “等しい” という言葉を使うとき, 次の性質を当たり前として使っているだろう:

- A と A 自身は常に等しい: $A = A$
- A と B が等しいならば, B と A も等しい: $A = B$ ならば $B = A$
- A と B が等しく, B と C が等しいならば, A と C も等しい:

$$A = B \text{ かつ } B = C \text{ ならば } A = C$$

二項関係の中で, 等号の持つ様な性質を抽出して同値関係の概念を定義する.

定義 15. X 上の二項関係 \sim が **同値関係** (equivalence relation) であるとは, 次が成り立つことである.

$$(E1) \quad \forall x \in X \quad x \sim x$$

$$(E2) \quad \forall x, y \in X \quad x \sim y \text{ ならば } y \sim x.$$

$$(E3) \quad \forall x, y, z \in X \quad x \sim y \text{ かつ } y \sim z \text{ ならば } x \sim z.$$

また, $x \sim y$ のとき, x と y は **を法として同値である** という.

例 16. 合同式. 自然数 $p \geq 1$ を固定する. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$m \equiv_p n \stackrel{\text{def}}{\iff} m - n \text{ が } p \text{ で割り切れる}$$

と定める. これは \mathbb{Z} 上の同値関係となる.

証明. (E1) $x - x = 0$ は p で割り切れるから, 「 $x \equiv_p x$ 」が成り立つ.

(E2) $x - y$ が p で割り切れるとすると, ある $a \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = ap$. このとき $y - x = (-a)p$ なので $y - x$ も p で割り切れる. よって 「 $x \equiv_p y \Rightarrow y \equiv_p x$ 」が成り立つ.

(E3) $x - y$ が p で割り切れ, $y - z$ も p で割り切れるとするとある $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = ap, y - z = bp$. このとき, $x - z = (x - y) + (y - z) = ap + bp = (a + b)p$ となるので $x - z$ も p で割り切れる. よって「 $x \equiv_p y$ かつ $y \equiv_p z \Rightarrow x \equiv_p z$ 」が成り立つ. \square

\sim を X 上の同値関係とする. $x \in X$ に対し $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$ とおく. $[x]$ を x の 同値類 という. すべての同値類を集めた集合

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$$

を \sim による X の商集合 という. 任意の $\alpha \in X/\sim$ に対し, $\alpha = [x]$ となる $x \in X$ が存在する. このとき, x を α の 代表元 という.

$x \in X$ にその同値類 $[x]$ を対応させる写像を 標準的射影 という. π は全射である.

$$\pi: X \longrightarrow X/\sim, \quad \pi(x) = [x]$$

例 17. 例 16 を引き続き考える. 任意の整数 a に対して, ある $b \in \mathbb{Z}$ と $0 \leq r < p$ をみたす整数 r が存在して $a = bp + r$ となる. このとき, $a \equiv r$ だから $[a] = [r]$ である. よって, 商集合 \mathbb{Z}/\equiv_p の任意の元は $[r]$ ($0 \leq r < p$) の形をしている. また, $0, 1, \dots, p - 1$ たちは互いに同値ではない. よって

$$\mathbb{Z}/\equiv_p = \{[0], [1], \dots, [p - 1]\}$$

15 時と (午後の)3 時は同じ時刻である. これは $p = 12$ の場合の合同式の考えに基づく.

例 18. 集合 A と B が対等するとき, $A \sim B$ とかくことにすると, \sim は集合全体の間と同値関係である. (集合全体は集合にならないので, より正確には, ある十分大きな集合 X を普遍集合として固定し, 考える全ての集合は X の部分集合であるとする.) この同値関係による集合 A の同値類を A の 濃度 といい, $|A|$ や $\text{card}(A)$ とかく.

§ 順序構造.

現代数学の考え方の一つは構造主義である. これは考える対象がどんな性質を持っているかに着目し, その一つ一つを対象が持つ構造として抜き出して調べる. その結果, 数学的対象は, ある集合とその上に与えられた構造の組として理解されることになる.

例えば, 実数全体の集合 \mathbb{R} については, まずは \mathbb{R} という集合があり, これが四則演算 $(+, -, \times, \div)$ の構造 (代数構造) を備えていて, 大小関係を議論することもでき (順序構造), 更に極限 (\lim) の概念を議論するための構造 (位相構造) を備えている, と考える.

ここでは, 順序構造を説明して構造主義の考えに慣れよう.

定義 19. 集合 X 上の順序 \prec とは, X 上の二項関係で次の条件をみたすものである:

- $\forall x \in X \quad x \prec x$
- $\forall x, y \in X \quad x \prec y$ かつ $y \prec x$ ならば $x = y$
- $\forall x, y, z \in X \quad x \prec y$ かつ $y \prec z \Rightarrow x \prec z$

例 20. \mathbb{R} の通常の大小関係 \leq は \mathbb{R} 上の順序であるが, 真の大小関係 $<$ は順序ではない.

例 21. 集合 X を固定する. X の部分集合 A, B に対して $A \prec B \stackrel{\text{def}}{=} A \subset B$ と定める. これは X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ (X の部分集合全体の集合) 上の順序である.

例 20 では, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \leq y$ であるか $y \leq x$ が成り立つ. つまり, 任意の 2 つの元を順序 \leq に関して比較できる. 一方, 例 21 ではそうになっていない. 例えば $X = \{1, 2, 3\}$ とし, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ とすると $A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たない.

定義 22. X 上の順序 \prec は, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \prec y$ または $y \prec x$ が成り立つとき, X 上の全順序であるという.

自然数には, 誰もが小さい頃から数を数えることで慣れ親しんでいるだろう. 改めて, 自然数全体の集合 \mathbb{N} とは何か? これは順序集合の中で最も基本的で特別なものである. まず, 始まりの数 1 がある. どんな自然数 n に対しても, その次の数 $\text{suc}(n)$ がある. ($n + 1$ のことである). どんな自然数も, 1 から始めて, その次, その次, を繰り返すことで必ず得られる. この様な自然数の持つ性質は, ペアノの公理系としてまとめられている. その中の一部は, 次のようにかける (これがペアノの公理系の全てではない. 要注意!):

(べ) $1 \in \mathbb{N}$.

(あ) $n \in \mathbb{N}$ ならば $\text{suc}(n) \in \mathbb{N}$.

(の) \mathbb{N} の部分集合 H が

(i) $1 \in H$,

(ii) 任意の $n \in H$ に対して $n \in H \Rightarrow \text{suc}(n) \in H$

の二つの性質をみたすとする. このとき, $H = \mathbb{N}$ が成り立つ.

自然数のこの性質を用いた証明の方法が数学的帰納法である. 自然数の元を変数とする命題 $P(n)$ があり, 「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ は真」を示したいとする. このとき, 次の二つのことを示すと, 証明ができたのであった.

(1) $P(1)$ が真であることを示す.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ を示す.

なぜこの論法が正しいのだろうか. それには,

$$H := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } P(n) \text{ をみたす} \}$$

とおいてみると良い. いま, $P(1)$ は真だから $1 \in H$ が成り立つ. また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 「 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ 」は「 $n \in H \Rightarrow \text{suc}(n) \in H$ 」と同値である. よって, H は条件 (の) の (i) と (ii) をみたす. よって $H = \mathbb{N}$ となる. これは「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(n)$ は真」を意味するので, 証明したいことが示せたことになる.

第八回講義の演習問題

問題 0 (講義内容のチェック問題). 講義の復習をしながら以下の問いに答えよ.

- (1) 定理 12 の証明の中で, 「チェック!」とかいてある二か所をチェックせよ.
- (2) 例 18 における二項関係 \sim が同値関係となることを確認せよ. (ヒント: 第七回講義の演習問題)
- (3) 例 20 において, \mathbb{R} の真の大小関係 $<$ が順序にならないのはなぜか?

問題 1 (定理 8 の証明). $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

- (1) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合族とする. 次の式が成り立つことを示せ.
 - (a) $f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$
 - (b) $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$
- (2) $(B_\mu)_{\mu \in M}$ を Y の部分集合族とする. 次の式が成り立つことを示せ.
 - (a) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$
 - (b) $f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$

問題 2. 集合 $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 \sim_q を次の様に定める. $(m, n), (m', n') \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}$ に対して,

$$(m, n) \sim_q (m', n') \stackrel{\text{def}}{\iff} mn' = nm'$$

このとき, \sim_q は同値関係となることを示せ.

問題 3. \sim は X 上の同値関係であるとする. 次を示せ.

$$\forall x_1, \forall x_2 \in X \quad x_1 \sim x_2 \iff [x_1] = [x_2]$$

問題 4 (例 21 の証明). 集合 X の部分集合 A, B に対して $A \prec B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset B$ と定める. これは X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ (X の部分集合全体の集合) 上の順序になることを証明せよ.

問題 5. $a, b \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a|b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists c \in \mathbb{N} \quad b = ac$$

と定める. 関係 $|$ は \mathbb{N} 上の順序となることを示せ. この順序は全順序か?

問題 6. 次の命題を数学的帰納法で証明せよ.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$